Cours

L'oscillateur harmonique amorti Résumé

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Présentation

En électricité comme en mécanique on obtient une des formes de l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\xi\omega_0\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0\end{array}\right.$$

Avec Q facteur de qualité, ξ facteur d'amortissement et ω_0 pulsation propre du système.

II Circuit RLC série soumis à un échelon de tension

II.1 Mise en en équation

On obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2i=0$$

avec $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ et $Q=\dfrac{L\omega_0}{R}$.

II.2 Résolution

Résolution de l'équation caractéristique :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0.$$

Donc $\Delta=\omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2}-4\right)$.

La forme de la solution dépend du signe de Δ :

- si $\Delta>0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles négatives R_1 et r_2 et la solution s'écrit :
$$i(t)=A\exp(r_1t)+B\exp(r_2t);$$
- si $\Delta<0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $r_{1-2}=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega$ avec $\omega=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et la solution s'écrit :
$$i(t)=\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t));$$
- si [1] $\Delta=0$, l'équation caractéristique possède une solution réelle double r et la solution s'écrit :
$$i(t)=(A+Bt)\exp(rt).$$

Les valeurs de A et B sont déterminées par les conditions initiales sur i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

1. Ce cas n'arrive jamais en réalité.

II.3 Portrait de phase

Le portrait de phase d'une grandeur X consiste à tracer $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ en fonction de X.

III Analogie électro-mécanique

En assimilant l'équation différentielle obtenue en mécanique à celle obtenue en électricité, on obtient le tableau d'analogies suivant :

Électricité	Mécanique
q	x
i	v
U	F
L	m
R	α
C	$1/k$