Cours

Le régime sinusoïdal forcé
Résumé

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Présentation du problème

Résolution d'une équation du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = f_0\cos(\omega t).$$

II Méthode complexe

La résolution d'une telle équation différentielle se fait en deux étapes :

- solution générale de l'équation homogène qui donne le régime transitoire et qui a été vue dans le premier chapitre ;
- solution particulière de l'équation qui donne ce qu'on appelle le *régime forcé*.

On ne revient pas sur le régime transitoire [1] et on s'intéresse à l'obtention d'une solution particulière.

La méthode usuelle de variation de la constante est utilisable mais elle amène à des calculs lourds et complexes.

Il existe une méthode beaucoup plus rapide qui utilise la *notation complexe*

Notation complexe. Toute grandeur sinusoïdale $X(t) = X_0\cos(\omega\cdot t+\varphi)$ possède une grandeur complexe associée notée $\underline{X}(t)$ telle que :

$$\underline{X}(t) = X_0\exp\left(\imath(\omega\cdot t+\varphi)\right) = \underline{X}_0\exp(\imath\cdot\omega\cdot t);$$

où :

- $\imath$ est l'imaginaire pur $\imath^2 = -1$;
- $\underline{X}_0$ est l'amplitude complexe telle que $\underline{X}_0 = X_0\exp(\imath\varphi)$.

L'avantage de cette notation est que les opérations de dérivation et d'intégration sont maintenant extrêmement simples :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \imath\omega\underline{X}_0\exp(\imath\cdot\omega\cdot t) = \imath\omega\underline{X}(t)$$

$$\int X(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\imath\omega}\underline{X}_0\exp(\imath\cdot\omega\cdot t) = \frac{\underline{X}(t)}{\imath\omega}$$

Donc, en notation complexe, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \times\imath\omega$$

$$\int \mathrm{d}t \Leftrightarrow \times\frac{1}{\imath\omega}$$

Pour retrouver ensuite l'expression réelle de $X(t) = X_0\cos(\omega\cdot t+\varphi)$ quand on connaît sa notation complexe, il suffit de se souvenir que :

$$X_0 = |\underline{X}(t)| = |\underline{X}_0|;$$

$$\varphi = \arg(\underline{X}_0).$$

1. Qu'on a étudié précédemment et qui a le bon goût de disparaître au bout d'un certain temps.

III Notion d'impédance

L'impédance complexe d'un dipôle est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

Pour les dipôles classiques, on a :

- un résistor $\underline{Z} = R$;
- une bobine $\underline{Z} = jL\omega$;
- un condensateur $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$.

Association d'impédances. Les règles d'associations d'impédances sont les mêmes que celles des résistances.

IV Phénomène de résonance

On parle de résonance quand une grandeur physique présente un maximum avec la variation de la pulsation du régime forcé.