Cours

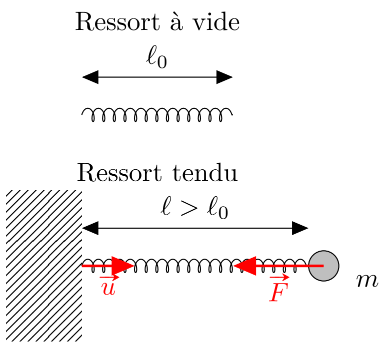
L'oscillateur harmonique
Résumé et méthode

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Résumé

I.1 La loi de Hooke

On utilise le paramétrage suivant :



La force $\vec{F}$ s'écrit alors :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}.$$

Avec ℓ_0 longueur à vide du ressort en m et k la raideur du ressort en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

Remarque : attention à l'orientation

Attention, imaginons que nous ayons paramétré le mouvement avec un vecteur $\vec{u}' = -\vec{u}$, on aurait alors :

$$\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\vec{u}'.$$

Il faut toujours faire attention au signe !

I.2 Mise en équation

L'application du principe fondamental de la dynamique amène à une équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0.$$

La position d'équilibre est simplement trouvée en déterminant la valeur de x quand $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0$:

$$x_e = \ell_0.$$

En plaçant l'origine du repère en x_e et en notant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, on obtient la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_1 = 0.$$

> **Remarque**
>
> L'évolution temporelle de tout système physico-chimique est déterminé par une équation différentielle.

I.3 Résolution

La solution de cette équation différentielle est un oscillateur harmonique :

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

On peut aussi écrire :

$$x_1(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t).$$

On revient à la variable initiale : $x(t) = x_1(t) + x_e$.
Les valeurs des doublets $(A,\, \varphi)$ et $(B,\, C)$ sont données par les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \end{cases}$$

La solution globale s'écrit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_e.$$

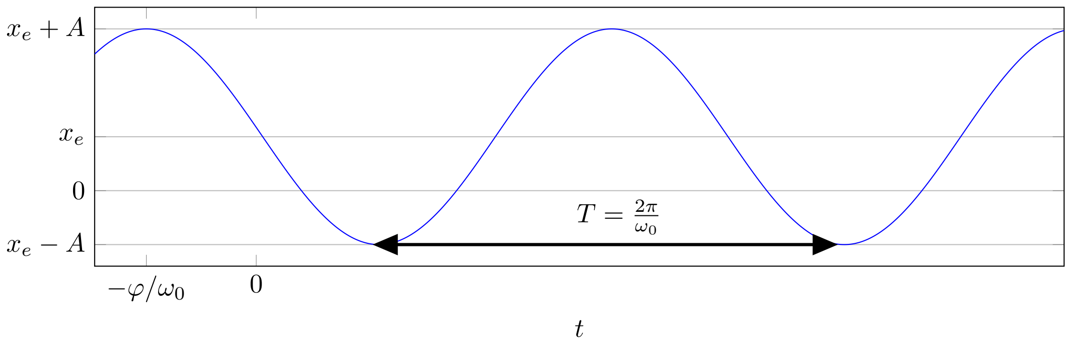


FIGURE 1 – Oscillation harmonique

I.4 Bilan énergétique

L'énergie potentielle élastique s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

L'énergie mécanique se conserve, on dit que le mouvement est conservatif :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

II Méthode

La résolution d'un problème masse-ressort suit toujours les mêmes étapes :

- définition du système, bilan des forces et application du principe fondamental de la dynamique ;
- expression de l'accélération en dérivant deux fois le vecteur position ;
- détermination de la position d'équilibre (accélération nulle) ;
- changement d'origine pour obtenir une équation différentielle homogène ;
- détermination des constantes d'intégration de la solution de l'équation différentielle homogène ;
- retour à la variable initiale (ou à l'origine initiale).