Cours

Superposition de deux ondes progressives Résumé

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Interférences

On considère donc deux ondes sinusoïdales progressives de même fréquence et on veut déterminer l'expression de l'onde résultante.

On donne l'expression de ces deux ondes :

$$\begin{cases} u_1(x_1, t) &= U_1 \cos(\omega t - kx_1 - \varphi_1) \\ u_2(x_2, t) &= U_2 \cos(\omega t - kx_2 - \varphi_2) \end{cases}$$

Le signal résultant en un point M de coordonnées x_{1_m} sur l'axe de propagation de l'onde 1 et x_{2_M} sur l'axe de propagation de l'onde 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} s_M(t) &= u_1(x_{1_M}, t) + u_2(x_{2_M}, t) \\ &= U_1 \cos(\omega t - kx_{1_M} - \varphi_1) + U_2 \cos(\omega t - kx_{2_M} - \varphi_2) \end{aligned}$$

On cherche à mettre ce résultat sous la forme :

$$s_M(t) = U \cos(\omega t - \varphi_T).$$

On note $\delta = x_{1_M} - x_{2_M}$ la différence de marche et $\varphi = k\delta + \varphi_1 - \varphi_2$.

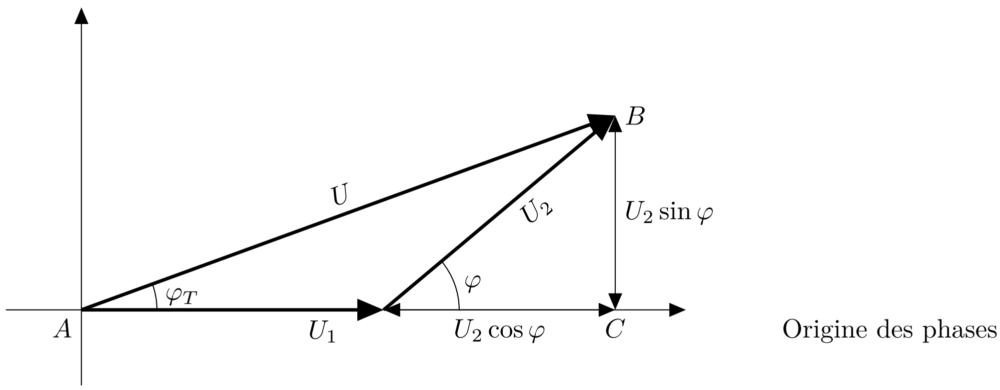

Figure 1 – Calcul de l'onde résultante

Le triangle ABC est rectangle en c et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} U^2 &= (U_1 + U_2 \cos\varphi)^2 + (U_2 \sin\varphi)^2 \\ &= U_1^2 + 2U_1U_2 \cos\varphi + (U_2 \cos\varphi)^2 + (U_2 \sin\varphi)^2 \\ &= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos\varphi \end{aligned}$$

On remarque que suivant la valeur de φ, l'amplitude de l'onde résultante peut varier entre un maximum ($\varphi = 0\,(2\pi)$) $U_{max} = U_1 + U_2$ et un minimum ($\varphi = \pi\,(2\pi)$) $U_{min} = |U_1 - U_2|$.

Si U est maximale, on parle d'interférences constructives et si U est minimale, on parle d'interférences destructives.

Ces relations sont relativement complexes mais elles prennent une forme simple dans le cas courant où $U_1 = U_2$: pour des interférences constructives, $U = 2U_1$ et pour des interférences destructives, $U = 0$.

II Onde stationnaire

Présence de conditions aux limites. Exemple de la corde fixée à ses deux extrémités :

$$\begin{cases} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \end{cases}$$

On obtient alors $u_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Définition : Onde stationnaire

Lorsqu'on peut écrire la perturbation liée à une onde sous la forme :

$$u(x,t) = f(t) \cdot g(x);$$

on dit qu'on a affaire à une onde stationnaire car il n'y a plus de phénomène de propagation.

Présence de ventres (amplitude la perturbation maximale) et de nœuds (amplitude de la perturbation minimale)

- pour les nœuds : $\sin(kx_N) = 0 \Leftrightarrow kx_N = n\pi$ ce qui conduit à $x_N = n\frac{\lambda}{2}$ car $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;
- pour les ventres : $\sin(kx_V) = 1 \Leftrightarrow kx_V = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ce qui conduit à $x_V = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$.

On observe que deux nœuds successifs sont séparés d'une distance égale à $\frac{\lambda}{2}$, de même pour deux ventres successifs. La distance entre un nœud et un ventre consécutifs est de $\frac{\lambda}{4}$.

Définition : Mode propre

Le terme $u_n(x,t)$ correspond à ce qu'on appelle un mode propre de la corde.

Quelquesoit la valeur de n, l'expression trouvée précédemment est une solution du problème. Comme le système est de plus linéaire, on sait alors que tout combinaison linéaire de modes propres est aussi solution.

La donnée des conditions initiales permet de déterminer quels sont les modes propres pouvant se former et ainsi d'obtenir la forme générale de l'onde.

La fréquence des modes propres s'écrit :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n\pi c}{2\pi L} = \frac{nc}{2L}.$$

.

III Diffraction

Pour la tache centrale du phénomène de diffraction d'une onde de longueur d'onde λ, une relation lie le demi-angle au sommet et la largeur de l'ouverture à l'origine de la diffraction : $\sin(\theta) = \lambda/a$.