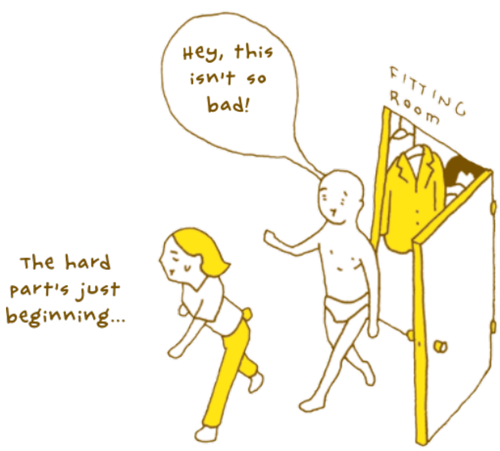
Plan de travail n°7

Théophile Cailliau

À rendre le lundi 25 février 2019

Table des matières



Chapitre 18

Filtrage linéaire

I J'applique mon cours

Exercice 1 — *Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales*

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a\cos(n\omega_0 t) + b\sin(n\omega_0 t)$$

Exercice 2 — *Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal*

$$v_{\text{eff}}^2 =< s^2(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T S^2\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{S^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{S^2}{2} \implies v_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3 — *Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à un signal à une ou deux composantes spectrales*

— C'est un passe-bas d'ordre 1, qui laisse passer les pulsations inférieures à $10\omega_1$. On a $s_2(t) = S_1\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi = \arctan(1/10) \approx 0.1$.

— C'est un passe-haut d'ordre 1, qui laisse passer les pulsations supérieures à $10\omega_1$. On a $s_2(t) = S_1\cos(100\omega_1 t + \varphi)$ avec $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/10) \approx 1.47$.

— C'est un passe-bas d'ordre 2, qui laisse passer les pulsations inférieures à $1000\omega_1$ (on a $Q = 10$). Alors, $s_2(t) = S_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + S_1\cos(100\omega_1 t + \varphi_2)$, avec $\varphi_1 \ll 1$ et $\varphi_2 \approx 0.1$.

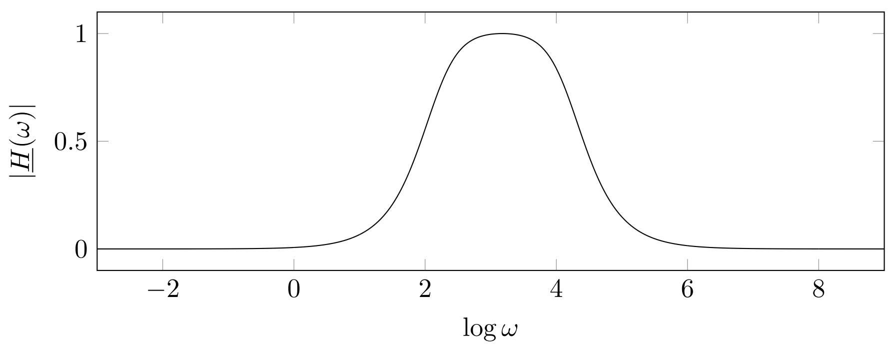
— C'est un passe-bande, avec $Q = 10$ et $\omega_0 = \omega_1$. Les pulsations de coupure sont

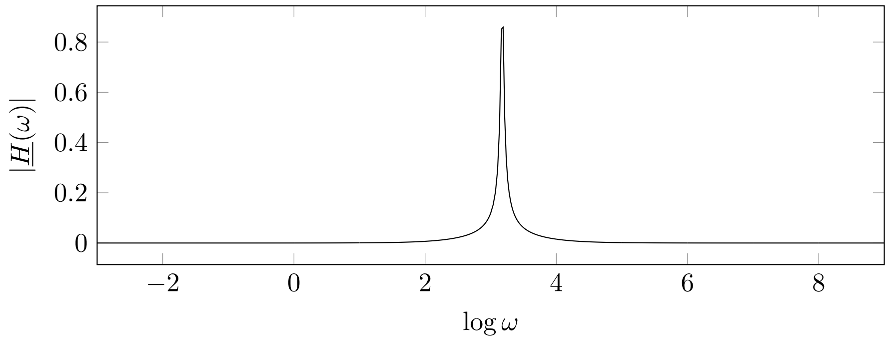
$$\omega_{c_1} = -\frac{\omega_1}{2Q} + \frac{\omega_1}{2}\sqrt{\frac{1}{100} + 4} \approx \omega_1 - \frac{\omega_1}{200}$$

$$\omega_{c_2} = \frac{\omega_1}{2Q} + \frac{\omega_1}{2}\sqrt{\frac{1}{100} + 4} \approx \omega_1 + \frac{\omega_1}{200}$$

Donc $s(t) = S_1\cos(\omega_1 t)$

Exercice 4 — *Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert*





Exercice 5 — *Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre afin de l'utiliser comme moyenneur, intégrateur, ou dérivateur*

On cherche à garder le terme constant dans la décomposition en série de fourier. On utilise un passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c \ll 2\pi f = 16000\pi$.

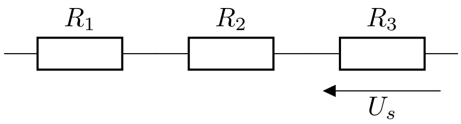
Pour un intégrateur, on a $\underline{H} = \frac{1}{\jmath\omega} \approx \frac{1}{1+\jmath\omega}$ puisque $\omega \gg 1$. C'est un passe-bas d'ordre 1 avec $\omega_0 = 1$.

Pour un dérivateur, $\underline{H} = \jmath\omega \approx \frac{\jmath\omega}{1+\jmath\omega/\omega_0}$ si $\omega_0 \gg \omega$. On a alors un passe-haut d'ordre 1

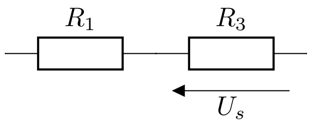
II Je m'entraîne

Exercice 6 — *Filtre passif d'ordre 1*

1. En $\omega \to 0$



En $\omega \to +\infty$,



Le filtre laisse passer les basses fréquences et les hautes fréquences

2. On a

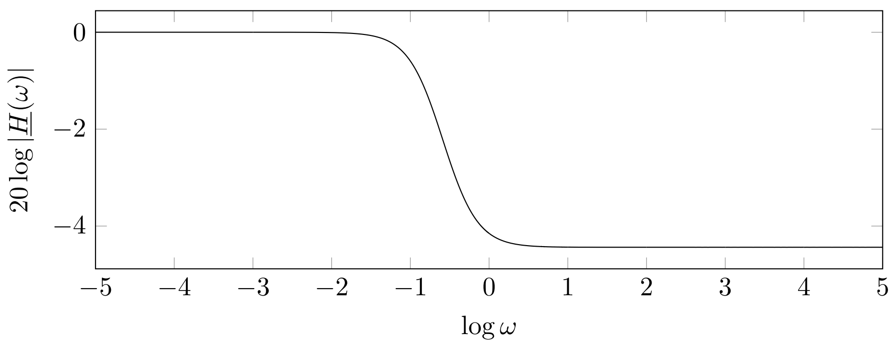
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2/\jmath C\omega}{R_2 + 1/\jmath C\omega}$$

et

$$\begin{aligned}
\underline{H} = \frac{R_3}{R_1 + \underline{Z}_{eq} + R_3} &= \frac{R_3 R_2 + R_3/\jmath C\omega}{(R_2 + 1/\jmath C\omega)(R_1 + R_3) + R_2/\jmath C\omega} \\
&= \frac{R_3 R_2 \jmath C\omega + R_3}{(R_2 \jmath C\omega + 1)(R_1 + R_3) + R_2} \\
&= \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{1 + R_2 \jmath C\omega}{1 + R_2 \jmath C\omega (R_1 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3)} \\
&= k \frac{1 + \jmath\omega\tau_1}{1 + \jmath\omega\tau_2}
\end{aligned}$$

Avec $k = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}$, $\tau_1 = R_2 C$ et $\tau_2 = R_2 C(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3)$

3.



Exercice 7 — *Double circuit RC*

1. C'est un filtre passe-bas : quand $\omega \to 0$, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts et donc U_s est non-nul, et quand $\omega \to +\infty$, les condensateurs se comportent comme des fils et $U_s = 0$.
2. On note U_1 la tension aux bornes de C_1. On a
$$\underline{U}_s = \frac{1/\jmath C_2\omega}{R_2 + 1/\jmath C_2\omega}\underline{U}_1 = \frac{1}{R_2\jmath C_2\omega + 1}\underline{U}_1$$
et
$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R_1 + \underline{Z}_{eq}}\underline{U}_e$$
Avec $\underline{Z}_{eq}$ l'impédance équivalente à l'association de la maille de droite, soit
$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(R_2 + 1/\jmath C_2\omega)/\jmath C_1\omega}{R_2 + 1/\jmath C_1\omega + 1/\jmath C_2\omega} = \frac{R_2 + 1/\jmath C_2\omega}{R_2\jmath C_1\omega + 1 + C_1/C_2}$$
D'où
$$\underline{U}_s = \frac{1}{1 - C_1C_2R_1R_2\omega^2 + \jmath\omega(C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_2)} \cdot \underline{U}_e$$
Soit $(\alpha, \beta) = (C_1C_2R_1R_2,\ \ C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_2)$
3. Non, on n'a pas $\underline{H} = \underline{H}_1^2$. En prenant $R = R_1 = R_2$, $C = C_1 = C_2$, on a $(\alpha, \beta) = (C^2R^2, 3CR)$. Or on a
$$\underline{H}_1^2 = \frac{1}{(1 + RC\jmath\omega)^2} = \frac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 2RC\jmath\omega}$$
soit $(\alpha, \beta) = (C^2R^2, 2CR)$. On a alors $\omega_0^2 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{2RC}{\omega_0}$ au lieu de $Q = \frac{3RC}{\omega_0}$
4. On a $|\underline{H}_1^2| \approx 0.495 \approx 3.7/7.5 \approx |H|$ et $\varphi_1 = -90.5°$, soit une différence de 0.5° avec φ. La mesure ne permet pas de révéler un écart flagrant entre $\underline{H}$ et $\underline{H}_1^2$.
5. Dans ces conditions, la deuxième hypothèse nous permet de poser $\underline{H} = \underline{H}_1^2$ (on a un courant nul donc pas d'association en parallèle à faire, on a réellement deux filtres du premier ordre à la suite). Il est donc normal de trouver les mêmes résultats.

Exercice 8 — *Effet d'un filtre passe-bas sur un signal créneau*

1. On a
$$\underline{H}(\jmath\omega) = \frac{1}{1 + \jmath RC\omega}$$
AN : $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC} \approx 160$ kHz. Beaucoup d'harmoniques sont transmises, avec un déphasage de $-\dfrac{\pi}{2}$. Le signal est un signal créneau
2. **AN :** $f_c = 159$ Hz. Le signal est entièrement coupé.

III Je progresse

Exercice 10 — *Détection synchrone*

1. (a) C'est un filtre passe-bas (circuit RC du premier ordre)

(b)

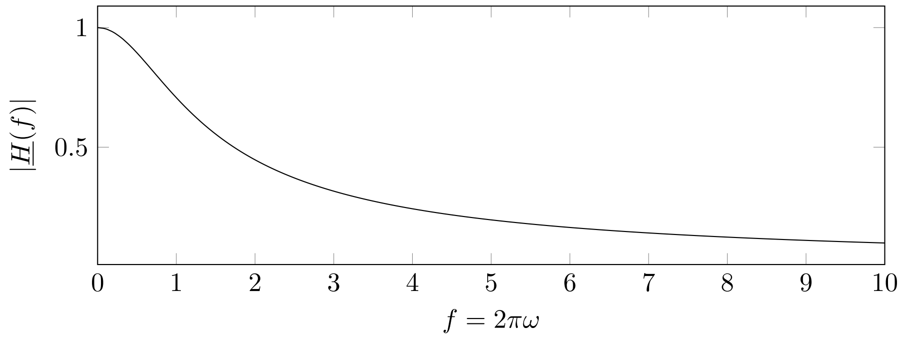
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \jmath RC\omega} = \frac{1}{1 + \jmath \frac{f}{f_0}}$$

Avec $f = 2\pi\omega$ et $f_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{RC}}$

(c)

$$|\underline{H}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff 1 + \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2 = 2$$
$$\iff f_c = f_0$$

(d)



(e) Pour $f \gg f_c$, le filtre coupe le signal, pour $f \ll f_0$, le filtre restitue le signal. C'est un passe-bas.

(f)

$$\Psi = \arg(\underline{H}) = -\arg\left(1 + \jmath\frac{f}{f_0}\right) = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right) = -\arctan\left(\omega\sqrt{RC}\right)$$

2. (a) On trouve :

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}V_eV_{ref} \\ B = \dfrac{1}{2}V_eV_{ref} \\ C = \dfrac{1}{2}V_{ref}b_0 \end{cases}$$

(b) Les deux fréquences sont $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 1100$ Hz

(c) On a les amplitudes

$$\begin{cases} S_1 = A \\ S_2 = |\underline{H}(4\pi f)| \\ S_3 = |\underline{H}(2\pi(f_b - f))| \\ S_4 = |\underline{H}(2\pi(f_b + f))| \end{cases}$$

Chapitre 19

Puissance et énergie

I J'applique mon cours

Exercice 1 — *Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel*

— **Cas 1 :** moteur
— **Cas 2 :** résistant
On a $\overrightarrow{O'M}$ constant donc $\vec{v}_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $P_{\mathcal{R}} = 0$

Exercice 2 — *Utiliser la loi de l'énergie ou de la puissance cinétique en fonction du contexte*

1. Loi de la puissance cinétique
2. Loi de l'énergie cinétique

Exercice 3 — *Établir et connaître les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), énergie potentielle élastique, énergie électrostatique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle)*

On a $E_p = -\int \vec{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

— Pour le poids,

$$E_p = -\int -mg\vec{e}_z(\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z) = mgz + \text{cte}$$

— Pour la force gravitationnelle,

$$E_p = \int \mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r(\mathrm{d}r\vec{e}_r + \alpha\vec{e}_\theta + \beta\vec{e}_\varphi) = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r} + \text{cte}$$

— Pour l'énergie éléctrostatique,

$$E_p = -\int \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r(\mathrm{d}r\vec{e}_r + \alpha\vec{e}_\theta + \beta\vec{e}_\varphi) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$$

— Pour l'énergie potentielle élastique,

$$E_p = \int k(x-\ell_0)\vec{e}_x(\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z) = \int k(x-\ell_0)dx = \frac{k}{2}(x-\ell_0)^2 + \text{cte}$$

$E_p = -\frac{k1}{r} + k_2$	Force en $1/r^2$
$E_p = -k_1x + k_2$	Le poids
$E_p = \frac{1}{2}k_1z^2 - k_2z + k_3$	Force élastique

Exercice 4 — *Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.*

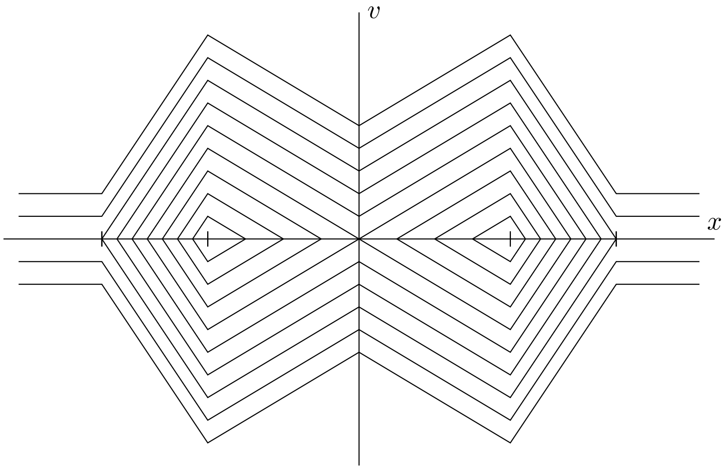
1. $W = \displaystyle\int_A^B \vec{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{x_A}^{x_B} k\, \mathrm{d}x$ est indépendant de la trajectoire. C'est une force conservatrice
2. $W = \displaystyle\int_A^B \vec{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_A^B -K\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{e}_r = \int_{r_A}^{r_B} -K\, \mathrm{d}r$ est indépendant de la trajectoire, c'est une force conservatrice.

3. $W = \int_A^B \vec{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{r_A}^{r_B} kr^2 \vec{u}_r\, \mathrm{d}r\vec{u}_r$ ne dépend pas de la trajectoire, c'est une force conservatrice.

Exercice 5 — *Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle*

- Pour $E_m = 0.5J$, le mouvement n'est pas périodique (état de diffusion), il n'y a pas de point de vitesse nulle.
- Pour $E_m = 0J$, le mouvement n'est pas périodique (état de diffusion), les points de vitesse nulle sont en $x = 0$, $x = 1$.
- Pour $E_m = -0.5J$, le mouvement est périodique (état lié), les points de vitesse nulle sont en $x = 1.5$ et $x = 6$.

Exercice 6 — *Expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase*



Exercice 7 — *Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions*

Il y a deux positions d'équilibre : en $x = 0.5$ et en $x = 3.5$. La première est instable et la seconde est stable.

Exercice 8 — *Identifier la situation de petits mouvements autour d'une position d'équilibre au modèle de l'oscillateur harmonique*

On se place à $x = x_e + \varepsilon$, avec $x_e = -1/\sqrt{3}$ et ε petit. On a

$$E_p(x_e + \varepsilon) \approx E_p(x_e) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_e) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) = E_p(x_e) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e)$$

On note $\gamma = \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_e) = 2k\sqrt{3}$. On a

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\varepsilon}(\varepsilon) = -\gamma\varepsilon$$

D'où

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\gamma}{m}\varepsilon = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique, de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \implies T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k\sqrt{3}}}$$

Exercice 9 — *Évaluer l'énergie minimale nécessaire pour franchir une barrière de potentiel*

Il faut apporter une énergie

$$\Delta E > \left| E_{p_{max}} - E_{p_{eq}} \right| \approx 1$$

II Je m'entraîne

Exercice 10 — *Traction ferroviaire*

1. On a

$$\mathcal{P} + \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = m\dot{v}v \iff \mathcal{P} + \vec{P}\cdot\vec{v} + \vec{T}\cdot\vec{v} = m\dot{v}v$$
$$\iff \mathcal{P} - mg(\sin\alpha\,\vec{e}_y + \cos\alpha\,\vec{e}_x)\cdot v\,\vec{e}_x + T\,\vec{e}_x\cdot v\,\vec{e}_x = m\dot{v}v$$
$$\iff \mathcal{P} - mg\cos\alpha v + Tv = m\dot{v}v$$

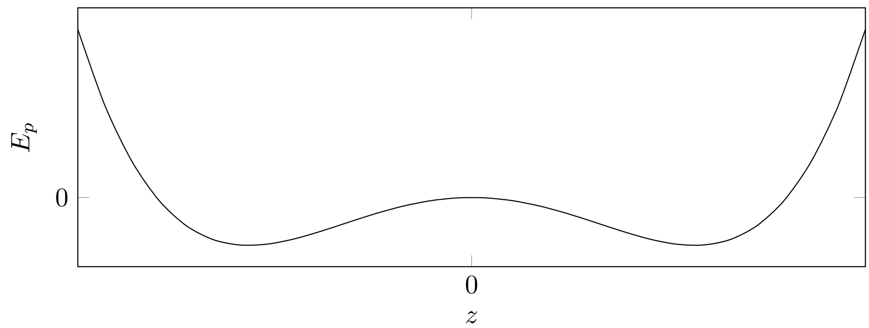
À la vitesse limite, on a $\dot{v} = 0$ donc

$$\mathcal{P} = -v(T - mg\cos\alpha) \iff v = \frac{\mathcal{P}}{mg\cos\alpha - T}$$

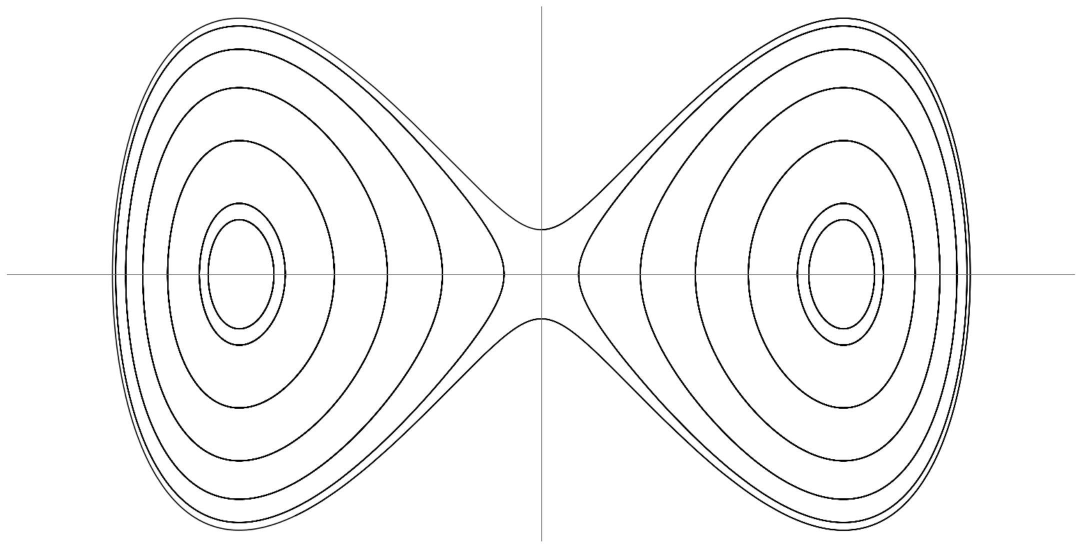
Exercice 11 — *Inversion de la molécule d'ammoniac*

1. On a

$$E_p = -\int F = \int \alpha z(z^2 - a^2)\,\mathrm{d}z = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{z^4}{2} - a^2z^2\right) + \mathrm{cte}$$



2. On a le portrait de phase suivant :



III Je progresse

Exercice 12 — *Monoxyde de carbone*

1.

$$E_p = \frac{b}{12x^{12}} - \frac{a}{6x^6}$$

2. À l'équilibre,

$$\vec{F} = \vec{0} \iff \frac{a}{x^7} = \frac{b}{x^{13}} \iff \ell_{eq} = \sqrt[6]{\frac{b}{a}} = 1.11 \cdot 10^{-10}$$

$\vec{F}$ ne s'annule qu'une fois sur la partie positive de Ox. On a

$$|\vec{F}| \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{b}{x^{13}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad |\vec{F}| \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{a}{x^7} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0^-$$

Donc E_p est convexe au voisinage de ℓ_{eq}, et l'équilibre est stable.

3. Il faut apporter une énergie cinétique $\Delta E_c > -E_p(\ell_{eq}) = \frac{a^2}{12b}$. On a alors

$$\frac{1}{2} m v_{0min}^2 = \frac{a^2}{12b} \iff v_{0min} = \sqrt{\frac{ma^2}{6b}} \approx 1.82 \cdot 10^{-22} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. On a, au voisinage de $x = \ell_{eq}$,

$$E_p(x) = E_p(\ell_{eq} + \varepsilon) = E_p(\ell_{eq}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(\ell_{eq}) = -\frac{a^2}{12b} + \frac{k\varepsilon^2}{2}$$

avec $k = \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(\ell_{eq}) = \frac{6a(a^2b)^{\frac{2}{3}}}{b^2}$

5. On dérive par rapport à ε :

$$-F(x) = k\varepsilon = -m\ddot{x} = -m\ddot{\varepsilon} \iff \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0 \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - \ell_{eq}) = 0$$

6. On résoud pour ε. On a

$$\varepsilon(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{(a^2b)^{\frac{1}{3}}}{b}\sqrt{\frac{6a}{m}}$ (solution d'un oscillateur harmonique avec $\varepsilon(0) = 0$). On a de plus

$$x(t) = \ell_{eq} + \varepsilon(t) = \ell_{eq} + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

7. On a la fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Chapitre 20

Équilibres acide-base et de précipitation

I J'applique mon cours

Exercice 1 — *Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues*

On a l'équation

$$CO_{2(g)} + 3\,H_2\,O + Ca^{2+} \rightleftharpoons CaCO_3 + 2\,H_3\,O^+$$

Et la constante d'équilibre

$$K = K_1 \cdot \frac{1}{K_s} \cdot K_3 \cdot K_2$$

Exercice 2 — *Retrouver les valeurs de constantes d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement)*

1. De gauche à droite : H_3A, H_2A^+, HA^{2+}, A^{3+}
2. Les pKa_i sont aux intersections des courbes :
   — $pKa_1 = 3$
   — $pKa_2 = 4,7$
   — $pKa_3 = 6,5$
   On a à chaque fois $Ka_i = 10^{-pKa_i}$
3. (a) $c = 0.84 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$
   (b)

Exercice 3 — *Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires*

Dans une solution acide, $Cu(OH)_2$ est majoritaire, et en milieu basique, NH_4^+ est majoritaire. Les deux espèces NH_3 et Cu^{2+} coexistent.

Exercice 4 — *Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique*

1. On a $[OH^-] = 10^{-2}$ mol $\cdot$ L^{-1} et $[H_3O^+] = \frac{K_e}{[HO^-]} = 10^{-12}$ mol $\cdot$ L^{-1}, donc $pH = 12$

II Je m'entraîne

Exercice 8 — *Détermination du pK_A d'un indicateur coloré*

1. C'est du jaune.
2. C'est du cyan.
3. (a) On a $c = [In^-] + [HIn]$. En milieu fortement acide, $A_1 = \epsilon_1 \ell c$ et en milieu fortement basique, $A_2 = \epsilon_2 \ell c$. On a donc $A_s = \epsilon_1 \ell [HIn] + \epsilon_2 \ell [In^-]$. En combinant, on a

$$A_1 - A_s = \epsilon_1 \ell (c - [\mathrm{HIn}]) - \epsilon_2 \ell [\mathrm{In}] = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \ell [\mathrm{In}]$$

$$A_s - A_2 = \epsilon_1 \ell [\mathrm{HIn}] + \epsilon_2 \ell ([\mathrm{In}^-] - c) = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \ell [\mathrm{HIn}]$$

d'où le résultat.

(b) On a

$$pKa = pH + \log\left(\frac{[\mathrm{In}^-]}{[\mathrm{HIn}]}\right) \approx 7,10 + 0,05 = 7,2$$