

# Plan de travail n°5

**Théophile Cailliau**

*À rendre le lundi 07 janvier 2019*

<b>Oscillateur harmonique amorti en régime forcé sinusoïdal</b>		
I	J'applique mon cours . . . . .	1
II	Je m'entraîne . . . . .	3
III	Je progresse . . . . .	6
<b>Dynamique newtonienne</b>		
I	J'applique mon cours . . . . .	8
II	Je m'entraîne . . . . .	10
III	Je progresse . . . . .	15



# Chapitre 13

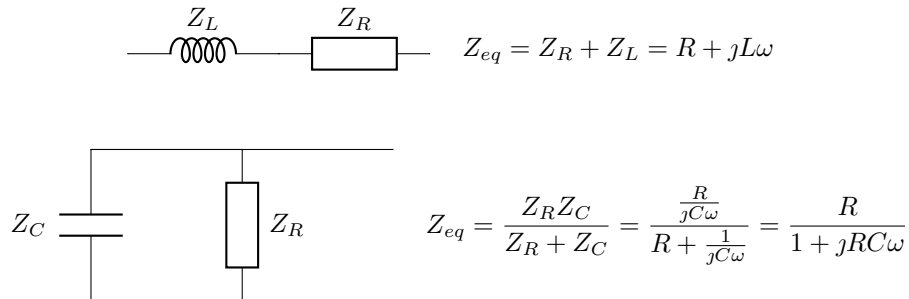
## Oscillateur harmonique amorti en régime forcé sinusoïdal

### I J'applique mon cours

**Exercice 1** — Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en régime harmonique

Composant	Impédance
Résistance	$Z_R = R$
Condensateur	$Z_C = 1/jC\omega$
Bobine	$Z_L = jL\omega$

**Exercice 2** — Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente



**Exercice 3** — Utiliser la méthode des complexes pour étudier le régime forcé en intensité ou en vitesse

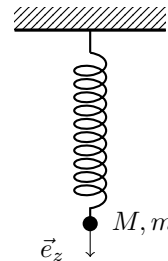
On étudie  $\{M\}$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

Bilan des forces :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \\ \Leftrightarrow -k(z - \ell_0)\vec{e}_z - h\vec{v} + F_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z - mg &= m\vec{a} \\ \Leftrightarrow -k(z - \ell_0) - hv + F_0 \cos(\omega t) - mg &= ma \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} -k(z - \ell_0) - h\frac{dz}{dt} + F_0 \cos(\omega t) - mg &= m\frac{d^2z}{dt^2} \Leftrightarrow m\frac{d^2z}{dt^2} + h\frac{dz}{dt} + k(z - \ell_0) = F_0 \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow m\frac{d^2v}{dt^2} + h\frac{dv}{dt} + kv &= F_0 \frac{d \cos(\omega t)}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v &= \frac{F_0}{m} \frac{d \cos(\omega t)}{dt} \\ \Leftrightarrow -\omega^2 \underline{V} + \frac{hj\omega}{m}\underline{V} + \frac{k}{m}\underline{V} &= j\omega \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underline{V} \left( -\omega^2 + \frac{h j \omega}{m} + \frac{k}{m} \right) &= j \omega \frac{F_0}{m} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{j \omega \frac{F_0}{m}}{-\omega^2 + \frac{h j \omega}{m} + \frac{k}{m}} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{F_0}{j m \omega + h - j \frac{k}{\omega}} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{F_0}{h + j \left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right)} \end{aligned}$$

On a

$$V = |\underline{V}| = \frac{F_0}{\sqrt{h^2 + \left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}}$$

et

$$\varphi = \arg V = \arg \left( \frac{F_0}{h + j \left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right)} \right) = -\arg \left( h + j \left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right) \right) = -\arctan \left( \frac{m \omega - \frac{k}{\omega}}{h} \right)$$

Donc

$$v(t) = V \cos(\omega t + \varphi)$$

**Exercice 4** — Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase dans le cas de la résonance en intensité ou en vitesse

On a  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  (par l'équation différentielle).  $V$  est maximal quand  $\left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right)$  est minimal, c'est à dire

$$m \omega - \frac{k}{\omega} = 0 \implies m \omega^2 - k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m} \implies \omega = \omega_0$$

Donc on a  $\omega_0 \approx 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On a

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \iff \frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{h} \iff Q = \frac{m \omega_0}{h} = \frac{m}{h} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

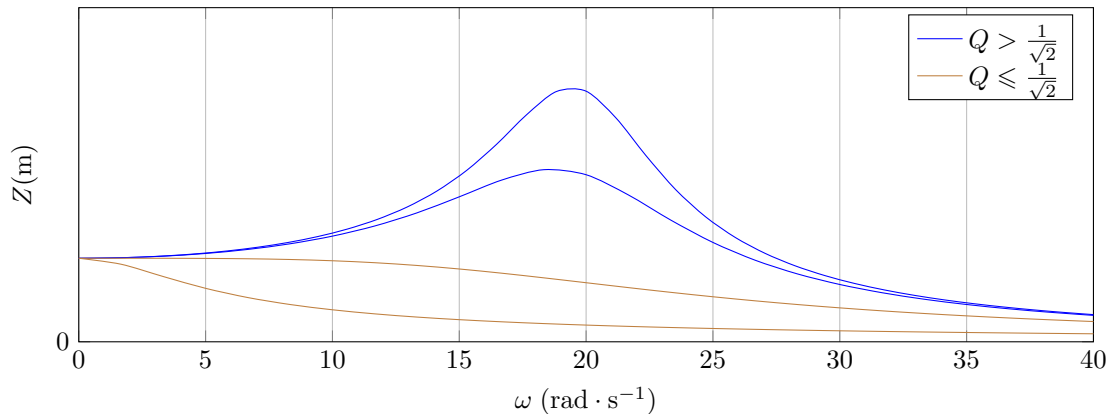
On a, après calculs

$$\frac{d\varphi}{d\omega}(\omega_0) = -\frac{2m}{h}$$

D'où, graphiquement (on regarde la pente de la tangente en  $\omega_0$ )

$$-\frac{2m}{h} \approx -\frac{Q}{10} \approx 0.102 \implies Q \approx 1$$

**Exercice 5** — À l'aide d'un outil de résolution numérique, mettre en évidence le rôle du facteur de qualité de la résonance en élancement



On a résonance uniquement pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Exercice 6** — Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité

On a  $\omega_0 \approx 1000$  ( $I = I_{max}$  à  $\omega = \omega_0$ ). Dans le circuit  $RLC$ , on trouve

$$I = \frac{E/R}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{E/R}{\sqrt{2}} &\iff \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 1 \\ &\iff L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \\ &\iff LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0 \\ &\iff \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \\ &\iff \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \\ &\iff \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 = \frac{1}{Q^2} (\omega_0^2 + 4(Q\omega_0)^2) =: \frac{1}{Q^2} \delta \\ &\quad \text{et } \omega = \frac{\pm \frac{\omega_0}{Q} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{\delta}}{2} = \frac{\pm \omega_0 \pm \sqrt{\delta}}{2Q} \\ &\iff \omega_1 = \frac{-\omega_0 + \sqrt{\delta}}{2Q} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 + \sqrt{\delta}}{2Q} \end{aligned}$$

Car  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont positifs. On a donc

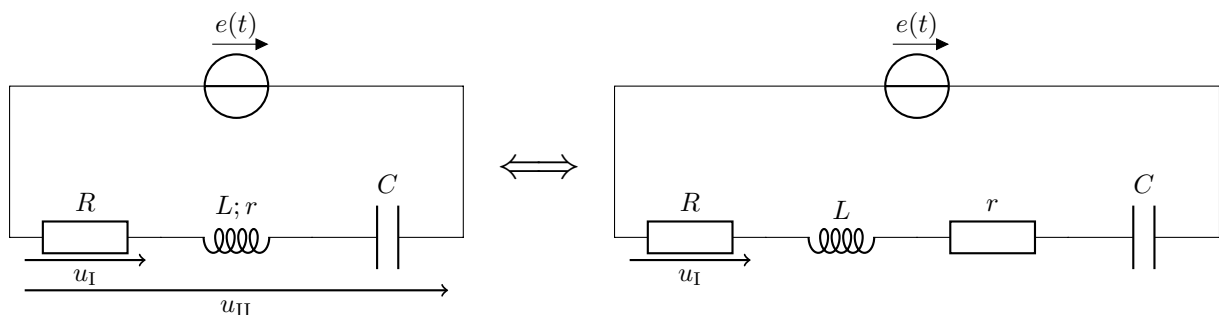
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Graphiquement, on a  $\Delta\omega \approx 1000$  et on a déjà établi  $\omega_0 \approx 1000$ , d'où  $Q \approx 1$

## II Je m'entraîne

**Exercice 7** — Étude expérimentale d'un dipôle  $RLC$  série

On étudie le circuit suivant :



On a directement  $u_{II} = e(t)$  par loi des mailles, et on a

$$\underline{U}_I = R\underline{I} \quad \text{et} \quad E = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + r\underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I} \iff \underline{U} = \frac{RE}{R + jL\omega + r + \frac{1}{jC\omega}}$$

D'où

$$U = |\underline{U}| = \frac{RE}{\sqrt{(r+R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Et

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = -\arg\left(R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r+R}\right)$$

Graphiquement, on a  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\omega = 2\pi \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} \approx 1047.19$  et  $U = 2V$ . On a

$$\begin{cases} \frac{RE}{\sqrt{(r+R)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = U \\ -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r+R}\right) = \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{RE}{\sqrt{(r+R)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = U \\ \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r+R} = -\tan\varphi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} RE = U\sqrt{(r+R)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} = -(r+R)\tan\varphi \end{cases}$$

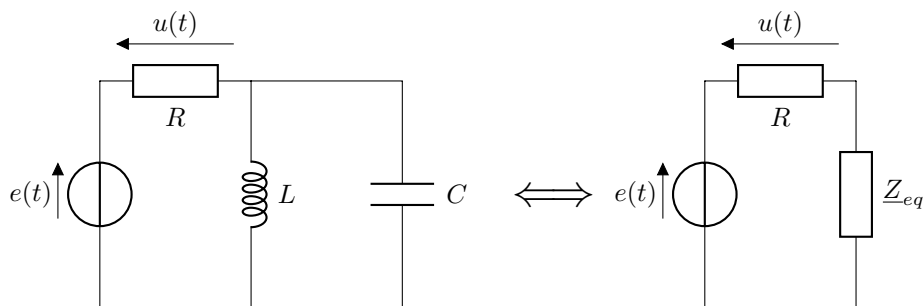
$$\iff \begin{cases} \left(\frac{RE}{U}\right)^2 = (r+R)^2 + ((r+R)\tan\varphi)^2 \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} = -(r+R)\tan\varphi \end{cases}$$

Numériquement, on trouve

$$\begin{cases} r = 5 \Omega \\ C = 7.31 \cdot 10^{-6} \text{ F} \end{cases}$$

### Exercice 8 — Antirésonance

1. On a



Avec

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Donc

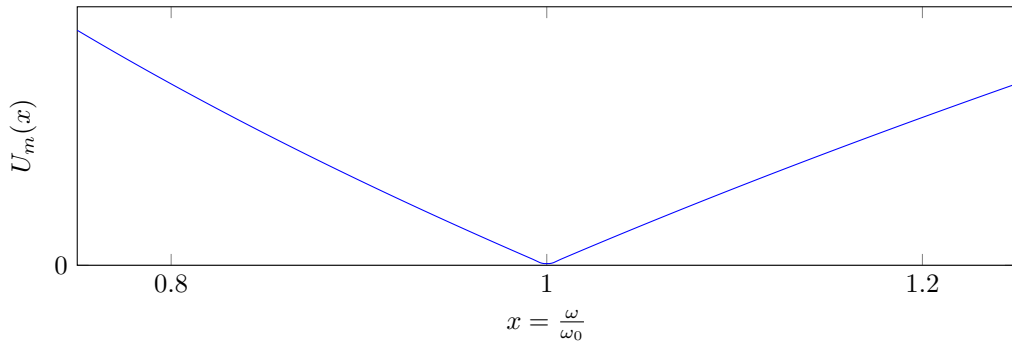
$$E = RI + Z_{eq}I \iff I = \frac{E}{R + Z_{eq}} \iff U = \frac{RE}{R + Z_{eq}}$$

Soit

$$\begin{aligned} U &= \frac{RE}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \\ &= \frac{RE(1 - LC\omega^2)}{R - LCR\omega^2 + jL\omega} \\ &= \frac{E(1 - LC\omega^2)}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2} \\ &= \frac{E(1 - x^2)}{1 + j\frac{L}{R}\omega_0 x - x^2} \end{aligned}$$

2.  $U_m$  s'annule pour  $x^2 = 1$ , soit  $\omega = \omega_0$ . On a

$$U_m(x) = \frac{E|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (\frac{L}{R}\omega_0 x)^2}}$$



**Exercice 9** — *Exploitation d'une courbe de résonance*

1. On ajoute un ampèremètre en série dans le circuit
2. On a

$$\underline{I} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Donc

$$I_m(\omega) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

Qui est maximal pour

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \iff L\omega^2 = \frac{1}{C} \iff \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Et donc

$$I_{max} = \frac{E}{R}$$

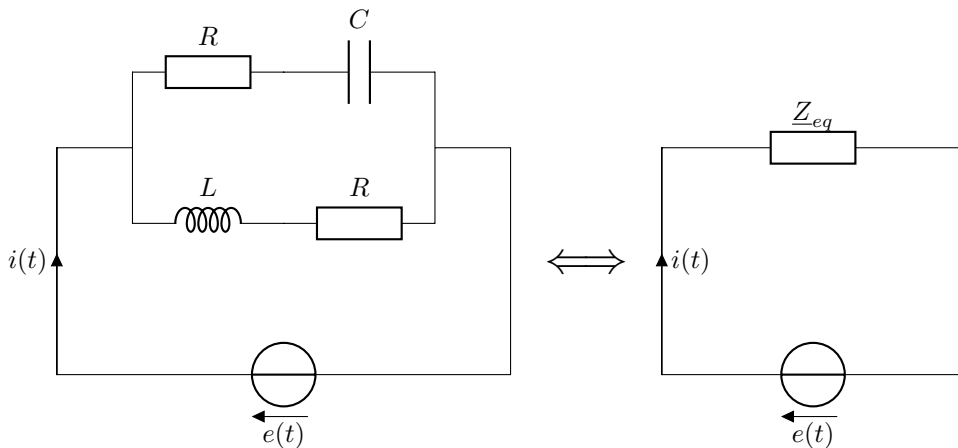
D'où  $R = \frac{E}{I_{max}} = 1,2\text{M}\Omega$

3. La pulsation de résonance est  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^{-4}$ . Graphiquement, on a  $\Delta\omega = 10^{-5}$ . D'après l'**Exercice 6**, on a  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . On a donc  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 10$ . On étudie un circuit  $RLC$  série donc on a  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ . On obtient

$$\begin{cases} C = 833 \text{ nF} \\ L = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ H} \end{cases}$$

**Exercice 10** — *Courant et tension en phase*

Le circuit est équivalent à



Avec

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{jL\omega + R}} = \frac{-LCR\omega^2 + CR^2j\omega + Lj\omega + R}{-LC\omega^2 + 2RCj\omega + 1} = \frac{jLCR\omega^2 + CR^2\omega + L\omega - jR}{jLC\omega^2 + 2RC\omega - j}$$

On veut donc

$$\varphi = \arg\left(\frac{E}{Z_{eq}}\right) = \arg(jLC\omega^2 + 2RC\omega - j) - \arg(jLCR\omega^2 + CR^2\omega + L\omega - jR) = 0$$

Ce qui revient à

$$\begin{aligned} \arg(jLC\omega^2 + 2RC\omega - j) &= \arg(jLCR\omega^2 + CR^2\omega + L\omega - jR) \\ \implies \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{2RC\omega}\right) &= \arctan\left(\frac{LCR\omega^2 - R}{CR^2\omega + L\omega}\right) \\ \implies \frac{LC\omega^2 - 1}{2RC\omega} &= \frac{LC\omega^2 - 1}{CR\omega + \frac{L}{R}\omega} \\ \implies (LC\omega^2 - 1)(CR\omega + \frac{L}{R}\omega) &= (2RC\omega)(LC\omega^2 - 1) \\ \implies (LC\omega^2 - 1)(CR + \frac{L}{R}) &= 2RC(LC\omega^2 - 1) \\ \implies -C^2LR\omega^2 + \frac{CL^2\omega^2}{R} + CR - \frac{L}{R} &= 0 \\ \implies \omega^2\left(-C^2LR + \frac{CL^2}{R}\right) + CR - \frac{L}{R} &= 0 \\ \implies \omega^2 = \frac{L - R^2C}{CL^2 - C^2LR^2} \\ \implies \omega = \sqrt{\frac{L - R^2C}{CL^2 - C^2LR^2}} \end{aligned}$$

Et on a la condition suivante :  $(L - R^2C)(CL^2 - C^2LR^2) \geq 0$  (cela revient à dire que la racine existe)

### III Je progresse

**Exercice 11** — *Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée.*

1. Bilan des forces sur  $\{M; m\}$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen :

$$\begin{aligned} - \vec{f}_d &= -\alpha(v - v_1)\vec{e}_x \\ - \vec{P} &= m\vec{g} \\ - \vec{F} &= -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(x - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x \end{aligned}$$

En appliquant le PFD, on a

$$\vec{f}_d + \vec{P} + \vec{F} = -\alpha(v - v_1)\vec{e}_x + m\vec{g} - k(x - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x = m\vec{a}$$

d'où, en projetant sur  $(Ox)$ , et en considérant  $x_1 = 0$  (route horizontale),  $v = v_1 = 0$  (position d'équilibre),

$$m\vec{a} + k(x - x_1 - \ell_0) + \alpha(v - v_1) = m\ddot{x} + k(x - \ell_0) = -mg \implies x_e = -\frac{mg}{k} + \ell_0$$

2. On a l'équation différentielle

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = -mg + k\ell_0 + kx_1(t) + \alpha\dot{x}_1(t)$$

et en utilisant  $x = X + x_e$ ,

$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = kx_1(t) + \alpha\dot{x}_1(t)$$

donc  $F(t) = kx_1(t) + \alpha\dot{x}_1(t)$

3. (a) On a  $F(t) = kX_1 \cos(\omega t) + \alpha X_1 \frac{d \cos(\omega t)}{dt}$ , d'où  $\underline{F} = k\underline{X}_1 + j\omega\alpha\underline{X}_1$ . On a alors

$$\underline{X}(-m\omega^2 + \alpha j\omega + k) = \underline{X}_1(k + j\omega\alpha) \implies \underline{V}(-m\omega^2 + \alpha j\omega + k) = j\omega\underline{X}_1(k + j\omega\alpha)$$

d'où

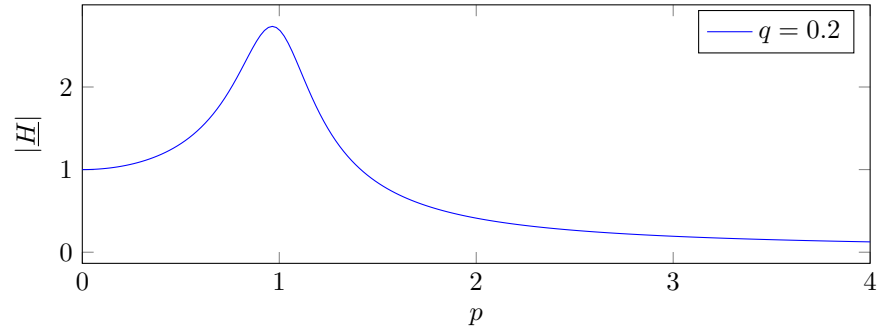
$$\underline{V} = \frac{j\omega\underline{X}_1(k + j\omega\alpha)}{-m\omega^2 + \alpha j\omega + k} \quad \text{et} \quad v_m = |\underline{V}| = \frac{\omega X_1 \sqrt{k^2 + (\omega\alpha)^2}}{\sqrt{(m\omega^2 + k)^2 + (\alpha\omega)^2}}$$

(b) On a

$$\underline{H} = \frac{k + j\omega\alpha}{-m\omega^2 + \alpha j\omega + k} = \frac{1 + j\frac{\alpha\omega}{k}}{1 - \frac{m}{k}\omega^2 + j\frac{\alpha\omega}{k}} = \frac{1 + 2jpq}{1 - p^2 + 2jpq}$$

Donc

$$|\underline{H}| = \sqrt{\frac{(2pq)^2 + 1}{(2pq)^2 + (1 - p^2)^2}}$$



(c) On a

$$|\underline{H}| = \sqrt{\frac{(\omega\alpha)^2 + k^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}} \approx 1$$

pour  $k$  très grand. On a donc  $|\underline{X}| \approx |\underline{X}_1|$  et la masse suit la surface de la route

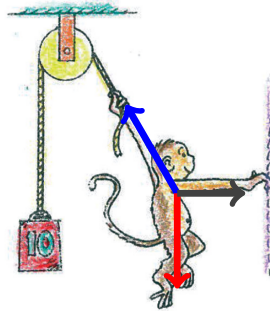


# Chapitre 14

## Dynamique newtonienne

### I J'applique mon cours

**Exercice 1** — Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure



On étudie {Mike} dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Les forces qui s'exercent sur Mike sont

- $\vec{P} = m\vec{g}$
- $\vec{T} = -\|\vec{T}\| \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_x + \|\vec{T}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_y$  avec  $\|\vec{T}\| = m_{\text{poids}}g$
- $\vec{t} = t\vec{e}_x$

Par le principe fondamental de la statique (qu'on applique puisque Mike est immobile),

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{t} = 0 \iff -mg\vec{e}_y - \|\vec{T}\| \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_x + \|\vec{T}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \vec{e}_y + t\vec{e}_x = 0$$

D'où

$$-mg + \|\vec{T}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff m = m_{\text{poids}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8.66 \text{ kg}$$

**Exercice 2** — Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points matériels

On a

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2}{m_T}$$

Donc

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{OM}_2}{dt} = \frac{d(m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2)}{dt} = \frac{d(m_T\vec{OG})}{dt} = m_T\vec{v}_G$$

**Exercice 3** — Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens

Le référentiel géocentrique décrit une ellipse autour dans le référentiel héliocentrique (translation). Le référentiel terrestre effectue une rotation dans le référentiel géocentrique

**Exercice 4** — Mettre en équation le mouvement dans le champ de pesanteur sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  dans  $\mathcal{R}$  référentiel supposé galiléen. Dans le champ de pesanteur et sans frottement, la seule force qui s'exerce est  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Par le PFD, on a

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \vec{g}$$

D'où l'accélération constante. On place l'axe  $(Oz)$  vertical opposé à  $\vec{g}$ . On a alors

$$\dot{z}(t) = -gt + \dot{z}_0 \implies z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0t + z_0$$

**Exercice 5** — *Exploiter la loi d'Archimède*

Le cylindre a un volume de  $V = \pi r^2 h = 314 \text{ cm}^3$ , et une masse de  $m = V\rho = 848 \text{ g}$ . La masse d'eau déplacée est  $m_{\text{eau}} = V\rho_{\text{eau}} = 314 \text{ g}$ . La balance affichera une masse de  $534 \text{ g}$

**Exercice 6** — *Établir l'équation du mouvement du pendule simple*

On étudie  $\{M\}$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

PFD :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \\ \iff T\vec{e}_r + P\cos\theta\vec{e}_r - P\sin\theta\vec{e}_\theta &= m\vec{a} \end{aligned}$$

Expression de l'accélération :

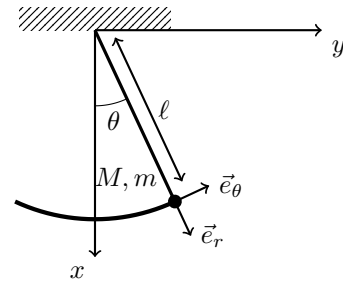
$$\overline{OM} = \ell\vec{e}_r \implies \vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta \implies \vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

D'où

$$m(-\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = (T + P\cos\theta)\vec{e}_r - P\sin\theta\vec{e}_\theta$$

Et

$$m\ell\ddot{\theta} = -P\sin\theta = -mg\sin\theta \iff \ddot{\theta} = \frac{-g}{\ell}\sin\theta$$



**Exercice 7** — *Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire*

En prenant  $\theta$  petit, on a  $\sin\theta \sim \theta$ , et l'équation du mouvement devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Qui est une équation d'oscillateur harmonique

**Exercice 8** — *Établir l'équation du portrait de phase (intégrale première) dans ce cadre et le tracer*

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

$E_m$  est constante, donc on a, à  $t = 0$ ,

$$E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_0^2 + mg\ell(1 - \cos\theta_0)$$

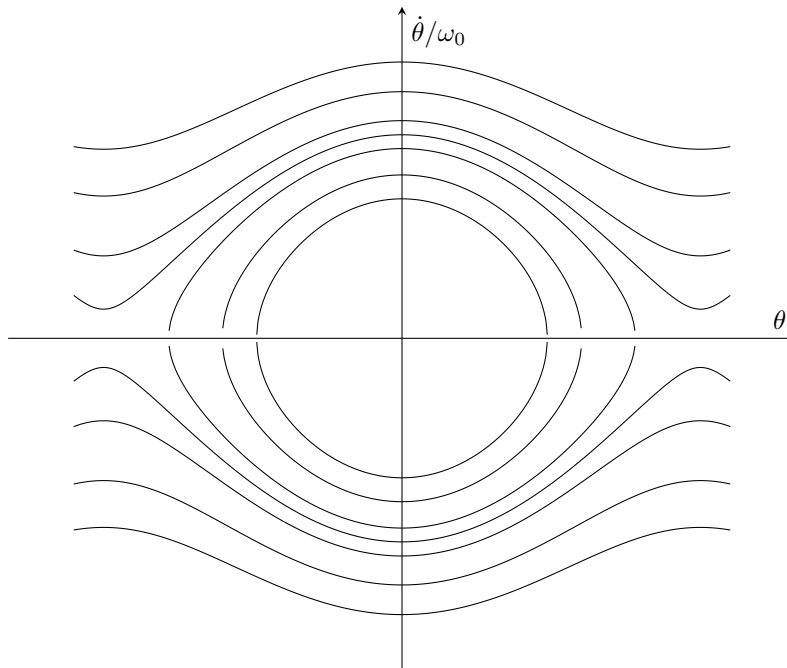
On a

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_0^2 + mg\ell(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Soit

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \dot{\theta}_0^2 - \frac{2g}{\ell}(1 - \cos\theta) + \frac{2g}{\ell}(1 - \cos\theta_0) \\ &= \dot{\theta}_0^2 + \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

On a le portrait de phase suivant :



## II Je m'entraîne

### Exercice 9 — Ressort incliné

1. On étudie  $\{M\}$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Bilan des forces :

$$- \vec{P} = P \sin \alpha \vec{e}_x - P \cos \alpha \vec{e}_y = mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$$

$$- \vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x = -k(x - \ell_0) \vec{e}_x$$

$$- \vec{R} = R \vec{e}_y \text{ la réaction du support}$$

En appliquant le PFD, on a

$$m \vec{a} = mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y - k(x - \ell_0) \vec{e}_x + R \vec{e}_y$$

et projeté sur  $(Ox)$ ,

$$ma = mg \sin \alpha - k(x - \ell_0) \iff m\ddot{x} + k(x - \ell_0) = mg \sin \alpha$$

À l'équilibre, on a  $a = \ddot{x} = 0$ , donc

$$k(x_e - \ell_0) = mg \sin \alpha \iff x_e = \frac{mg \sin \alpha}{k} + \ell_0$$

2. On pose  $X = x - x_e \iff x = X + x_e$ . On a

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0 \iff \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

en notant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Alors,

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

On a les conditions initiales

$$\begin{cases} X(0) = d \\ \dot{X}(0) = 0 \end{cases}$$

D'où  $A = d$ ,  $B = 0$  et

$$x(t) = d \cos(\omega_0 t) + x_e$$

### Exercice 10 — Projectile dans le champs de pesanteur

1. (a) Le poids  $\vec{P}$  est la seule force exercée. On a  $\vec{a} = \vec{g}$ , donc  $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$ . On a alors

$$\begin{cases} \dot{y} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Au maximum, on a  $\dot{z} = 0$ , soit

$$-gt_1 + v_0 \sin \alpha = 0 \iff t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

On a

$$\begin{cases} y = v_0 \cos \alpha t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

D'où les coordonnées de  $S$  :

$$\begin{cases} y = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \\ z = -\frac{1}{2}g \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

(b)

$\alpha$	Temps $t$	Point $S$
$30^\circ$	5 s	(433, 125)
$60^\circ$	8.66 s	(433, 375)
$90^\circ$	10 s	(0, 500)

(c) On a l'équation de trajectoire

$$z(y) = -\frac{1}{2}g \left( \frac{y}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{y}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{1}{2}g \frac{y^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + y \tan \alpha$$

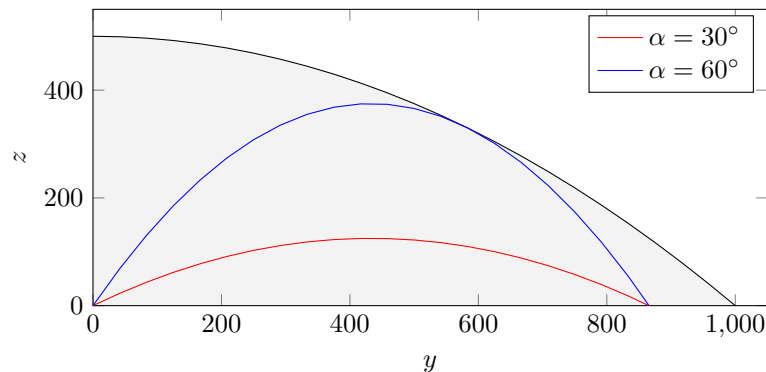
Le point  $(y_1, z_1)$  est accessible ssi

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \mathbb{R} / z(y_1) = z_1 &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} / -\frac{gy_1^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha + y_1 \tan \alpha - z_1 - \frac{gy_1^2}{2v_0^2} = 0 \\ &\iff \Delta = y_1^2 - 4 \frac{-gy_1^2}{2v_0^2} \left( -\frac{gy_1^2}{2v_0^2} - z_1 \right) \geq 0 \\ &\iff 1 \geq \frac{4g}{2v_0^2} \left( \frac{gy_1^2}{2v_0^2} + z_1 \right) \\ &\iff z_1 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gy_1^2}{2v_0^2} \end{aligned}$$

D'où l'équation

$$\Sigma : z(y_1) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gy_1^2}{2v_0^2}$$

(d)



2. (a) On a

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{g} - K\vec{v}$$

Donc

$$m\ddot{y} = -K\dot{y} \iff \ddot{y} + \frac{K}{m}\dot{y} = 0 \iff \dot{y} = A \exp\left(-\frac{Kt}{m}\right) = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{Kt}{m}\right)$$

Et

$$m\ddot{z} = -mg - K\dot{z} \iff m\ddot{z} + K\dot{z} = -mg \iff \dot{z} = -\frac{gm}{K} + \left(v_0 \sin \alpha + \frac{gm}{K}\right) \exp\left(-\frac{Kt}{m}\right)$$

(b) On a

$$y = -\frac{mv_0 \cos \alpha}{K} \exp\left(-\frac{K}{m}t\right) + \frac{mv_0 \cos \alpha}{K}$$

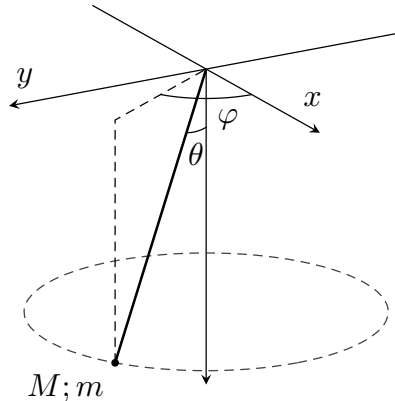
Et

$$z = -\frac{gmt}{K} - \frac{mv_0 \sin \alpha + \frac{gm^2}{K}}{K} \exp\left(-\frac{K}{m}t\right) + \frac{mv_0 \sin \alpha + \frac{gm^2}{K}}{K}$$

(c) **AN** :  $t = 4.05$  s. C'est inférieur au temps nécessaire sans frottement fluide. Celui-ci est non-négligeable.

### Exercice 11 — Pendule conique

1. On se place dans  $(O, x, y, z)$  repère galiléen, avec  $(Oz)$  dirigé vers le bas. On étudie le point  $M$  de masse  $m$ .



Bilan des forces :

$$- \vec{P} = mg\vec{e}_z$$

$$- \vec{T} = T \cos \theta \vec{e}_z + T \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + T \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y$$

Expression de l'accélération :

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= L \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + L \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + L \cos \theta \vec{e}_z \\ \implies \vec{v} &= -\dot{\varphi} L \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + \dot{\varphi} L \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y \\ \implies \vec{a} &= L\dot{\varphi}^2 (-\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x - \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y) \end{aligned}$$

D'où, par le PFD projeté sur  $(Oz)$  et  $(Ox)$ ,

$$\begin{cases} mg + T \cos \theta = 0 \\ T \sin \theta \cos \varphi = -L\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \varphi \end{cases} \implies \frac{mg}{\cos \theta} = L\dot{\varphi}^2 \implies \dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\frac{mg}{\cos \theta L}}$$

Et la période  $\tau$  associée est  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

2. (a) Le fil est tendu à partir de  $\omega_0$  tel que  $OPO''$  soit isocèle. On a dans ce cas

$$\cos \theta_0 = \frac{a}{L} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{a}}$$

### Exercice 12 — Chute libre

1. (a) On étudie  $\{B\}$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Bilan des forces :

$$- \vec{P} = mg \vec{e}_x$$

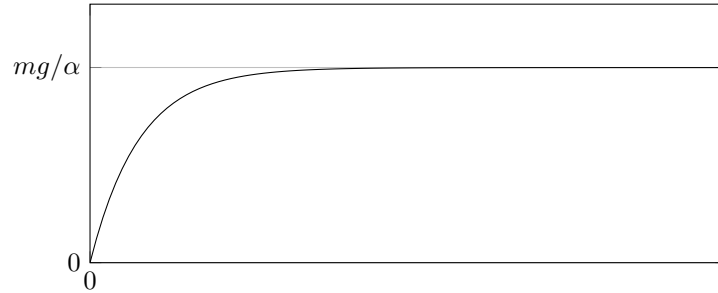
$$- \vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\alpha v \vec{e}_x$$

Par le PFD, on a

$$ma = mg - \alpha v \iff m\dot{v} + \alpha v = mg \iff \dot{v} + \frac{\alpha}{m}v = g$$

(b) L'équation est équivalente à

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = g \iff v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau g = -\frac{mg}{\alpha} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{m}{\alpha}g$$



Pour  $t \ll \tau$ , on a

$$v(t) \approx -\frac{mg}{\alpha}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + \frac{mg}{\alpha} = gt$$

(c) On a

$$x(t) = \tau^2 g \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau gt + x_0 = \tau^2 g \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau gt$$

(d) **AN :** Pour  $B_1$ ,  $\tau = 53846.15$  s. Pour  $B_2$ ,  $\tau = 4461.53$  s. La force de frottement a une grande influence sur le temps de stabilisation de la vitesse.

2. (a) Bilan des forces :

$$- \vec{P} = mg \vec{e}_x$$

$$- \vec{F} = -\beta \|\vec{v}\| \vec{v} = -\beta v^2 \vec{e}_x$$

On applique le PFD :

$$ma = mg - \beta v^2 \iff m\dot{v} + \beta v^2 = mg \iff \dot{v} + \frac{\beta}{m}v^2 = g$$

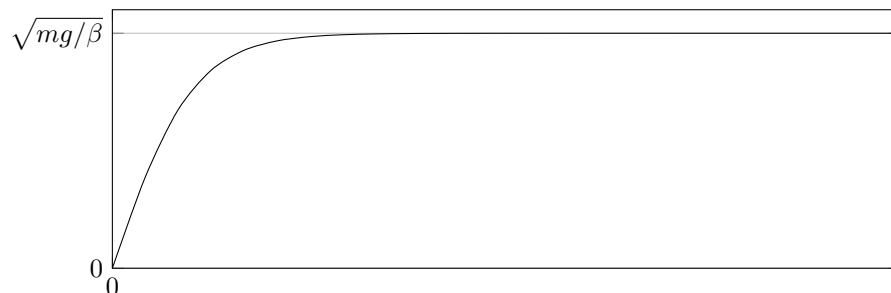
Par analyse dimensionnelle, on a  $[\beta] = \frac{M}{L}$ , et donc  $[\sqrt{mg/\beta}] = \frac{L}{T}$

(b) On a

$$\dot{v}(t) + \frac{\beta}{m}v^2 = -g \operatorname{th}^2\left(\frac{gt}{v_l}\right) + g + \frac{\beta}{m}v_l^2 \operatorname{th}^2\left(\frac{gt}{v_l}\right) = g$$

Soit

$$\frac{\beta}{m}v_l^2 = g \iff v_l = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$$



(c)  $v_l$  est la vitesse en régime stabilisé. Si  $t \ll \frac{v_l}{g}$ , alors on a  $v(t) \approx gt$ . C'est le même équivalent qu'avec un frottement fluide linéaire.

(d)

$$x(t) = \int v(t)dt = \frac{v_l^2}{g} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{v_l}\right)$$

**Exercice 13** — Point glissant à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère

1. On étudie  $\{M\}$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen. Les forces qui s'exercent sont

- $\vec{P} = P \cos \theta \vec{u}_r - P \sin \theta \vec{u}_\theta = mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$
- $\vec{N} = N \vec{u}_r$

On a

$$\overline{OM} = r \vec{u}_r \implies \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

Donc, par PFD,

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \implies mr \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - mr \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = (N + mg \cos \theta) \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Soit

$$mr \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0 \quad (E)$$

Pour des petits mouvements autour de  $O$ , on a  $\sin \theta \sim \theta$  et donc on a l'équation d'oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0 \implies T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

2. On a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta = 0 \iff \omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta \iff \omega d\omega = -\frac{g}{r} \sin \theta d\theta \iff \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{r} \cos \theta + C$$

On a, d'après les conditions initiales

$$0 = \frac{g}{r} \cos \pi + C = -\frac{g}{r} + C \iff C = \frac{g}{r}$$

Et d'après l'équation du PFD,

$$N + mg \cos \theta = -mr\omega^2 = -mr \frac{2g}{r} (\cos \theta + 1) = -2mg(\cos \theta + 1)$$

D'où

$$N = -3mg \cos \theta - 2mg = -mg(3 \cos \theta + 2)$$

Donc  $N$  s'annule pour  $\theta = \arccos(-2/3) \approx 131^\circ$ .  $N$  est nul donc la seule force qui s'exerce sur  $M$  est le poids. La trajectoire devient alors une parabole (chute libre dans le champs de gravité sans frottement)

3. Bilan des forces :

- $\vec{P} = mg(-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$
- $\vec{N} = N \vec{u}_r$

Expression de l'accélération :

$$\overline{OM} = r \vec{u}_r \implies \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \implies \vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

Et, par PFD

$$mr \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - mr \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = (N - mg \cos \theta) \vec{u}_r + mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

D'où

$$mg \sin \theta = mr \ddot{\theta} \iff \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin \theta \quad (E')$$

Pour  $\theta \ll 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . On a alors

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{r} \theta = 0 \iff \ddot{\theta} - \omega_0^2 \theta = 0 \iff \theta = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t} = \theta_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)$$

C'est absurde, et cela provient du fait que l'approximation faite n'est pas toujours valable (on n'a pas  $\theta_0 \ll 1 \implies \forall t, \theta \ll 1$ ).

4. On a

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{g}{r} \cos \theta + C = \frac{g}{r} (1 - \cos \theta)$$

Et de même,

$$N - mg \cos \theta = -mr \dot{\theta}^2 = -2mg + 2mg \cos \theta \iff N = -2mg + 3mg \cos \theta$$

Qui s'annule pour  $\theta'_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$

### III Je progresse

**Exercice 14** — *Propriétés mécaniques du verre*

1. On a  $\vec{R} = R_t \vec{e}_x + R_n \vec{e}_y = -\vec{P} = mg \sin \alpha \vec{e}_x + mg \cos \alpha \vec{e}_y$  (première loi de Newton)
2. On a la condition :  $R_t \leq \mu R_n \iff mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \iff \tan \alpha \leq \mu$
3. On a  $\alpha \geq 35^\circ \implies \tan \alpha \geq \tan(35^\circ) \approx 0.700$  d'où  $\mu = 0.700$ .