Plan de travail n°3

Théophile Cailliau

Pour le lundi 05 novembre 2018

Chapitre 7

Les lois de Descartes

I J'applique mon cours

Exercice 1 — *Caractériser une source lumineuse par son spectre*

Spectre	**Source**
1	Lampe
2	Étoile
3	Laser

Exercice 2 — *Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur*

λ (nm)	**Couleur**
400	Violet
470	Bleu
500	Bleu-Vert
580	Jaune
650	Rouge-Orange

Exercice 3 — *Définir le modèle de l'optique géométrique et indiquer ses limites*

Il faut que la longueur caractéristique des variations des propriétés physiques des milieux (indice, transparence, ...) soit très grande devant la longueur d'onde de la radiation, et il faut que les milieux soient transparents, homogènes et isotropes.

Exercice 4 — *Établir la condition de réflexion totale*

Il y a réflexion totale si $n_1 > n_2$ et $i > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

II Je m'entraîne

Exercice 5 — *Incidence de Brewster*

On note i l'angle d'incidence et θ l'angle réfracté. On a $\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$ et donc

$$\sin i = n \sin\theta \implies n = \tan i \implies i = \arctan n$$

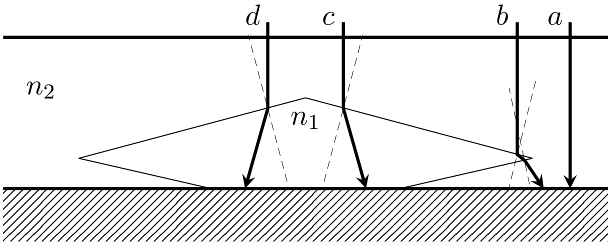
Exercice 6 — *Poisson rouge dans un aquarium*

1. On note i_2 l'angle du rayon réfracté lors du passage air-verre. On a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ soit $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right) \approx 28.65°$. On note i_3 l'angle du rayon réfracté lors du passage verre-eau. On a de même $i_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3}\sin i_2\right) \approx 32.73°$
2. On a $n_1 < n_2$ donc s'il y a réflexion totale, c'est à l'interface verre-eau (second dioptre). On a, pour le second dioptre $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_2}\right) \approx 62.45°$ donc il faut des RL dans le verre avec un angle $i_2 > 62.45°$, ce qui est impossible puisqu'on a $i_{2\text{MAX}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \approx 50°$. Il n'y a donc aucune réflexion totale.

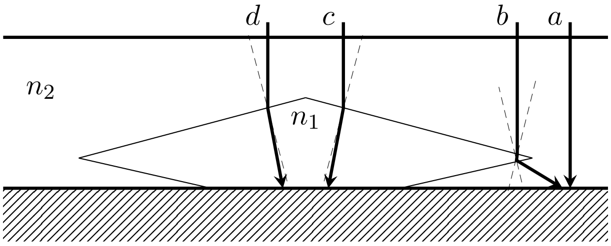
Exercice 7 — *Reconnaissance de gemmes*

Partie I

1. Si $n_1 < n_2$,



Si $n_1 > n_2$,



2. Dans le premier cas, l'écran aura une plus forte intensité lumineuse sur l'extérieur du solide, alors que dans le deuxième c'est au centre du solide (partie en contact avec l'écran) qu'il y aura la plus forte intensité lumineuse

Partie II

1. La pierre de Moissanite va floter alors que les deux autres vont couler.
2. L'indice de réfraction du Zircon est supérieur à celui de l'iodure de méthylène, et celui du Verre flint est inférieur à celui de l'iodure de méthylène. D'après la partie *I*, la pière numéro 2 est le Zircon et la pierre numéro 1 est le Verre flint.

III Je progresse

Exercice 8 — *Le prisme*

1. On a $\widehat{MPR} = 180 - r - r'$
2. On a $\widehat{MPR} + A = 180 \iff A = r + r'$
3. On a $D = i - r + i' - r' = i + i' - A$
4. On a $\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$

5. On a

$$\sin i = n \sin r \implies \cos i \,\mathrm{d}i' = n \cos r \,\mathrm{d}r \quad (1)$$

$$\sin i' = n \sin r' \implies \cos i \,\mathrm{d}i' = n \cos r' \,\mathrm{d}r' \quad (2)$$

$$A = r + r' \implies 0 = \mathrm{d}r + \mathrm{d}r' \quad (3)$$

$$D = i + i' - A \implies \mathrm{d}D = \mathrm{d}i + \mathrm{d}i' \quad (4)$$

En combinant (4) et (2), on trouve

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}i + n\frac{\cos r'}{\cos i'}\mathrm{d}r'$$

Et avec (3) et (1),

$$\mathrm{d}r' = -\mathrm{d}r = -\frac{\cos i}{n \cos r}\mathrm{d}i$$

On en déduit donc

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}$$

Pour $r = r'$, on a $i = i'$ par les relations de la question **4**, et donc $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - 1 = 0$

6. On a $D_m = 2i - A = 2\arcsin(n \sin r) - A = 2\arcsin\left(n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A$

IV Je vise l'excellence

Exercice 10 — *Déviation des rayons par l'atmosphère terrestre*

1. On a $n > n_0$ donc les rayons se rapprochent de la normale. Les rayons provenant des étoiles proches de l'horizon sont donc percues plus hautes.

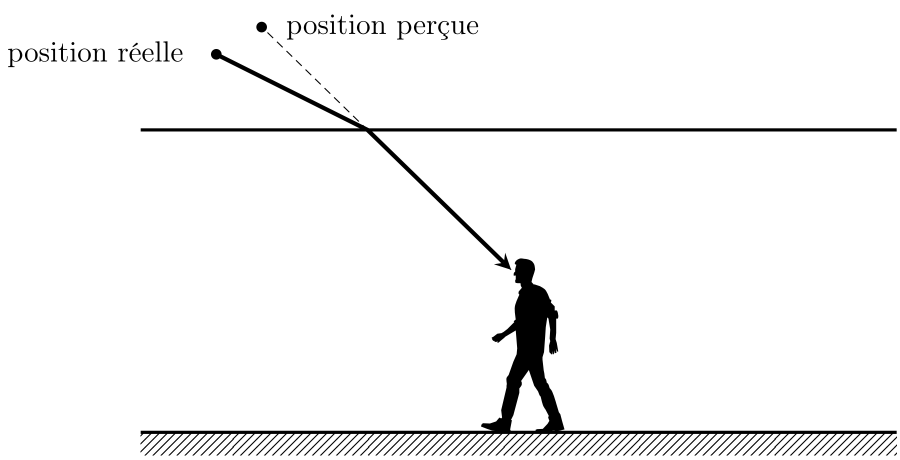


Figure 1 – Les étoiles proches de l'horizon apparaissent plus hautes

2. Soit i_1 l'angle de réfraction. Alors on a $n_0 \sin i_0 = n \sin i_1$ donc

$$i_1 = \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\sin i_0\right)$$

Or $D = i_0 - i_1$ d'où

$$D = i_0 - \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\sin i_0\right)$$

AN : $D = -0.029°$

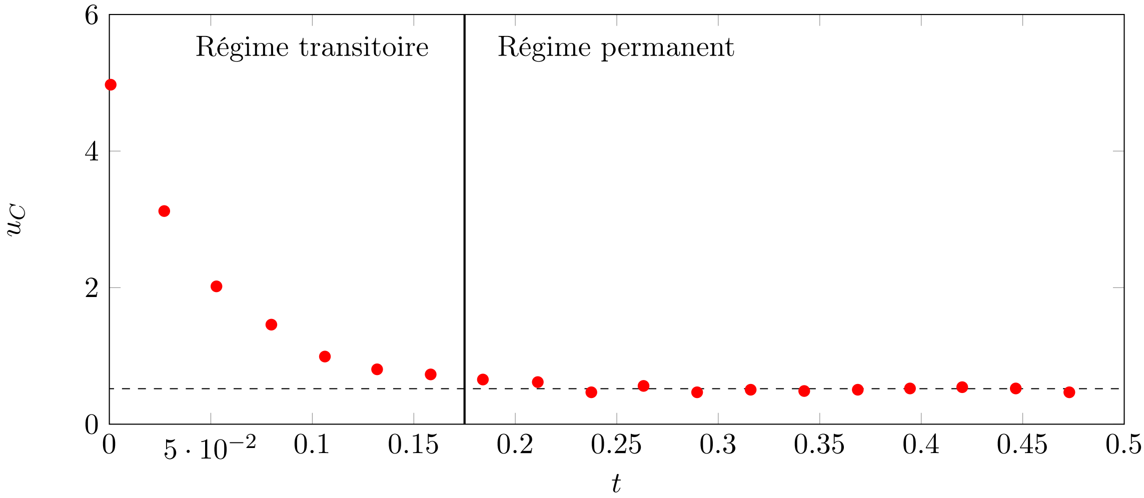
3. Les courtes longueur d'onde étant plus déviées, les rayons qui nous parviendront en dernier seront ceux de courte longueur d'onde. Il seront donc bleus.

Chapitre 8

Régime transitoire

I J'applique mon cours

Exercice 1 — *Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon*



Exercice 2 — *Interpréter et utiliser les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité dans une bobine*

— Dans le premier circuit, par continuité de la tension,

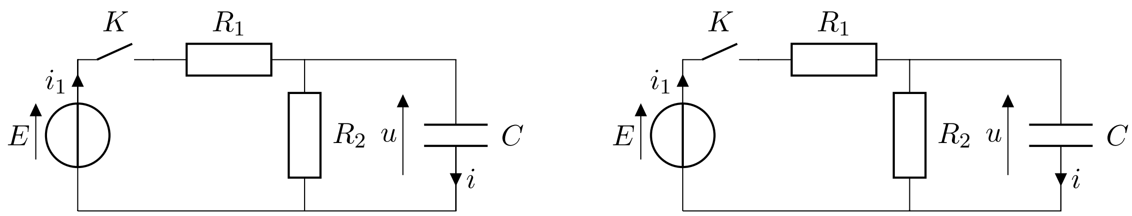
$$u(0^+) = 0$$

— Dans le deuxième circuit, par continuité de l'intensité

$$i(0^+) = 0$$

Exercice 3 — *Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles*

On définit des courants dans les deux circuits :



— Dans le premier circuit, on a les équations de mailles

$$E - u(t) - R_1 i_1 = 0$$

$$R_2(i_1 - i) - u(t) = 0$$

Donc

$$E - u(t) - R_1\frac{R_2 i + u(t)}{R_2} = 0 \iff E - u(t)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - R_1 i = 0$$

Et

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$$

Donc on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_1 C}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{E}{R_1 C} \tag{$\star$}$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{i}{R_1 C^2} = 0$$

— Dans le second circuit, on a

$$E - u(t)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - R_1 i = 0$$

Et

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$$

Donc on a

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}i = \frac{E}{L\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{$\star\star$}$$

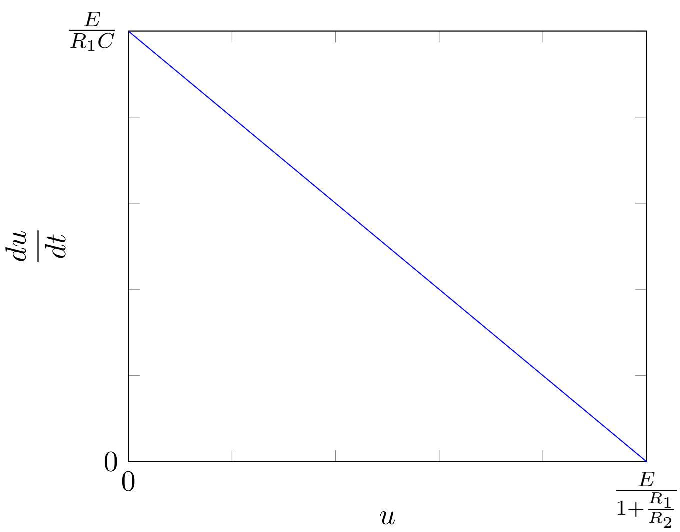
En dérivant, on obtient

$$\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 u}{L^2\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} = 0$$

Exercice 4 — *Prévoir l'évolution du système, avant toute résolution de l'équation différentielle, à partir d'une analyse s'appuyant sur une représentation graphique de la dérivée temporelle de la grandeur en fonction de cette grandeur*

On a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{R_1 C}\left(E - u(t)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right)$$



La dérivée tend vers 0, le système va se stabiliser.

Exercice 5 — *Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon*

— On cherche à résoudre ($\star$). On résout d'abord

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_1C}\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right) = 0 \qquad (H\star)$$

qui a pour solution générale $u(t) = A\exp\left(-t\frac{R_1+R_2}{R_2R_1C}\right)$. On cherche ensuite une solution particulière de ($\star$).

$$u(t) = \frac{ER_2}{R_1+R_2}$$

en est une, donc la solution générale de ($\star$) s'écrit

$$u(t) = \frac{ER_2}{R_1+R_2} + Ae^{-t\frac{R_1+R_2}{R_2R_1C}}$$

Or on sait $u(0^+) = 0$ donc on a

$$u(t) = \frac{ER_2}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-t\frac{R_1+R_2}{R_2R_1C}}\right) = \frac{ER_2}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec $\tau = \frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}$. On a alors

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{CER_2}{\tau(R_1+R_2)}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

— On cherche à résoudre ($\star\star$). On résout d'abord

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}i = 0 \qquad (H\star\star)$$

qui a pour solution générale $i(t) = A\exp\left(-t\frac{R_1}{L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}\right)$. On cherche ensuite une solution particulière de ($\star\star$).

$$i(t) = \frac{E}{R_1}$$

en est une, donc la solution de ($\star\star$) s'écrit, en sachant $i(0^+) = 0$,

$$i(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t\frac{R_1}{L\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}}\right) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

avec $\tau = \frac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$. On a alors

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{LE}{R_1\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exercice 6 — *Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire*

La durée du régime transitoire est $\Delta t \approx 4,6\tau$. Dans le premier circuit, on a $\Delta t \approx 4,6 \cdot \frac{CR_1R_2}{R_1+R_2} \approx 8,36 \cdot 10^{-5}$ s. Dans le deuxième, on a $\Delta t \approx 4,6 \cdot \frac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2} \approx 0.28 \cdot 10^{-3}$ s

Exercice 7 — *Réaliser des bilans énergétiques*

On étudie le premier circuit. On a

$$P = u(t)i(t) = u(t)C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu(t)^2\right)$$

D'où

$$\mathcal{E}_l = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right)^2$$

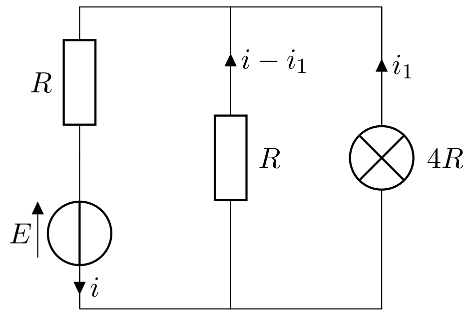
On a aussi

$$\begin{aligned}
&E = R_1 i(t) + u(t)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\\
\Longrightarrow\ &Ei(t) = Ri^2(t) + u(t)i(t)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\\
\Longrightarrow\ &E\int_0^{+\infty} i(t)\mathrm{d}t = CE\left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right) = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}C\left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right)^2\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\\
\Longrightarrow\ &\mathcal{E}_J = CE\left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right) - \frac{1}{2}C\left(\frac{ER_2}{R_1+R_2}\right)^2\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)
\end{aligned}$$

II Je m'entraîne

Exercice 8 — *Lampe témoin*

1. En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit est équivalent à



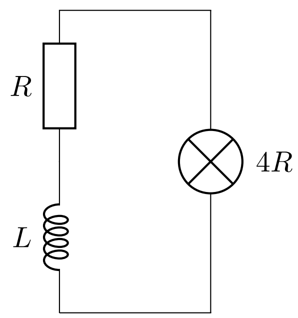
On a l'équation de maille

$$E - Ri - R(i - i_1) = 0$$

Et par diviseur de courant, $i = 5i_1$. On a donc

$$E - 5Ri_1 - R(5i_1 - i_1) = 0 \iff i_1 = \frac{E}{9R}$$

2. Le circuit est équivalent à



On a par la loi des mailles l'équation différentielle

$$L\frac{\mathrm{d}i}{dt} + 5Ri = 0$$

dont la solution générale s'écrit

$$i(t) = Ae^{-\frac{5Rt}{L}}$$

Or on sait, par continuité de i, que $i(0^+) = i - i_1 = \dfrac{5E}{95} - \dfrac{E}{9R} = \frac{4E}{9R}$ (on utilise la même méthode qu'à la première question pour trouver i), et donc

$$i(t) = \frac{4E}{9R}e^{-\frac{5Rt}{L}}$$

Exercice 9 — *Branches en parallèle*

1. Par continuité de i, on a $i(0^+) = 0$ et donc $i'(0^+) = \eta$
2. On a $i' = \eta - i$ et l'équation de maille

$$u = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{L}(R + R') = \frac{R'\eta}{L}$$

   La solution est, en tenant compte de $i(0^+) = 0$,

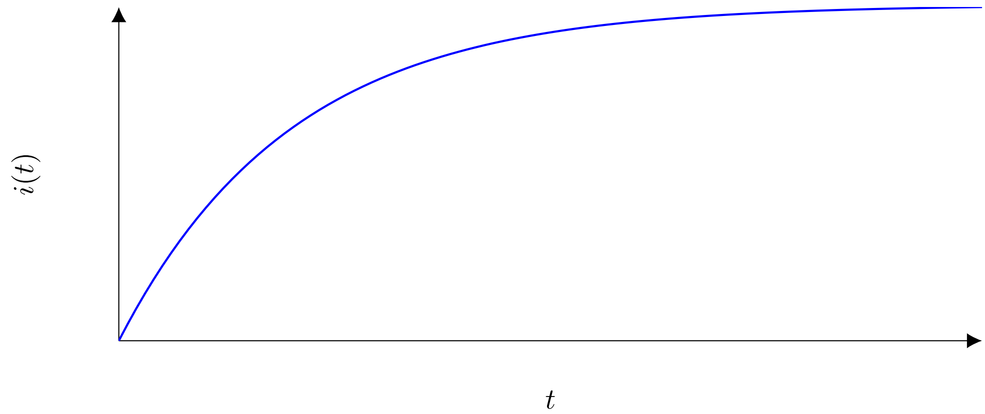
$$i(t) = \frac{R'\eta}{R + R'}\left(1 - e^{-t\frac{R+R'}{L}}\right)$$

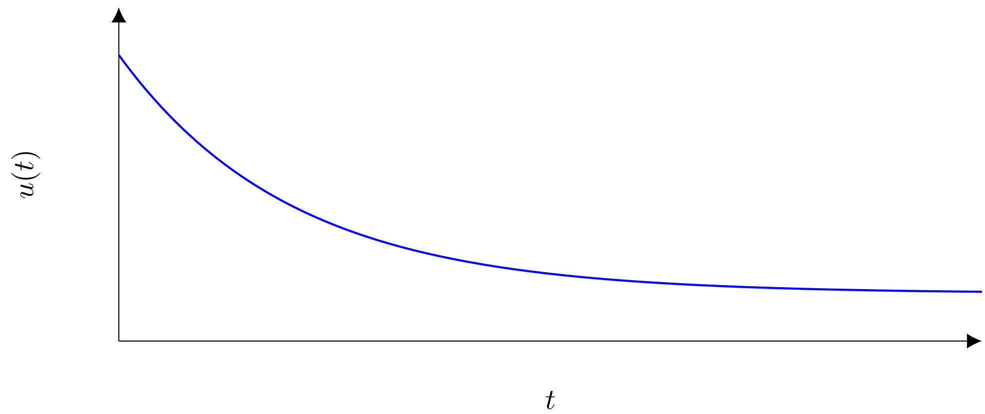
3. On a $i' = \eta - i$ (loi des noeuds) donc

$$i'(t) = \eta - \frac{R'\eta}{R + R'}\left(1 - e^{-t\frac{R+R'}{L}}\right)$$

   Et $u(t) = R'i'(t)$ (loi d'Ohm)

4.





Exercice 10 — *Décharge d'un condensateur dans un circuit RC'*

1. a) On l'équation de maille :

$$-u_C + u_{C'} + Ri = 0 \implies \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + d\frac{\mathrm{d}u_{C'}}{\mathrm{d}t} \implies \frac{i}{C} + \frac{i}{C'} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

   Et donc

$$i(t) = A\exp\left(-t\frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}}{R}\right)$$

   On a $i(0) = \dfrac{u_C(0)}{R} = \dfrac{q_0}{CR}$ donc

$$i(t) = \frac{q_0}{CR}\exp\left(-t\frac{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}}{R}\right)$$

b) À l'état limite, la tension aux bornes de la résistance est nulle et vaut la différence des tensions aux bornes des deux condensateurs. On en déduit $u_C = u_{C'}$, soit $\frac{q_f}{C} = \frac{q'_f}{C'}$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{q_f}{C} = \dfrac{q'_f}{C'} \\ q_f + q'_f = q_0 \end{cases} \implies \begin{cases} q_f = q_0 \dfrac{C}{C+C'} \\ q'_f = q_0 \dfrac{C'}{C+C'} \end{cases}$$

2. a) On a

$$\mathcal{E}_j = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t = R\frac{q_0^2}{C^2}\int_0^{+\infty} \exp\left(-t\frac{\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}}{R}\right)\mathrm{d}t = R\frac{q_0^2}{C^2}\cdot\frac{R}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}}$$

b) On a

$$\begin{aligned} -u_C + u_{C'} + Ri = 0 &\implies -u_C i + u_{C'} i + Ri^2 = 0 \\ &\implies Cu_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + C'u_{C'}\frac{\mathrm{d}u_{C'}}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = 0 \\ &\implies C\int_0^{+\infty} u_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C'\int_0^{+\infty} u_{C'}\frac{\mathrm{d}u_{C'}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} Ri^2\mathrm{d}t = -\mathcal{E}_j \\ &\implies \mathcal{E}_j = -\frac{C}{2}\left(\frac{q_f}{C} - \frac{q_0}{C}\right)^2 - \frac{C'}{2}\cdot\frac{q_f'^2}{C'^2} = -\frac{(q_f-q_0)^2}{2C} - \frac{q_f'^2}{2C'} \end{aligned}$$

III Je progresse

Exercice 12 — *Étude d'un tube à décharge*

1. Le dipole n'est pas linéaire et est passif (sa caractéristique passe par l'origine).

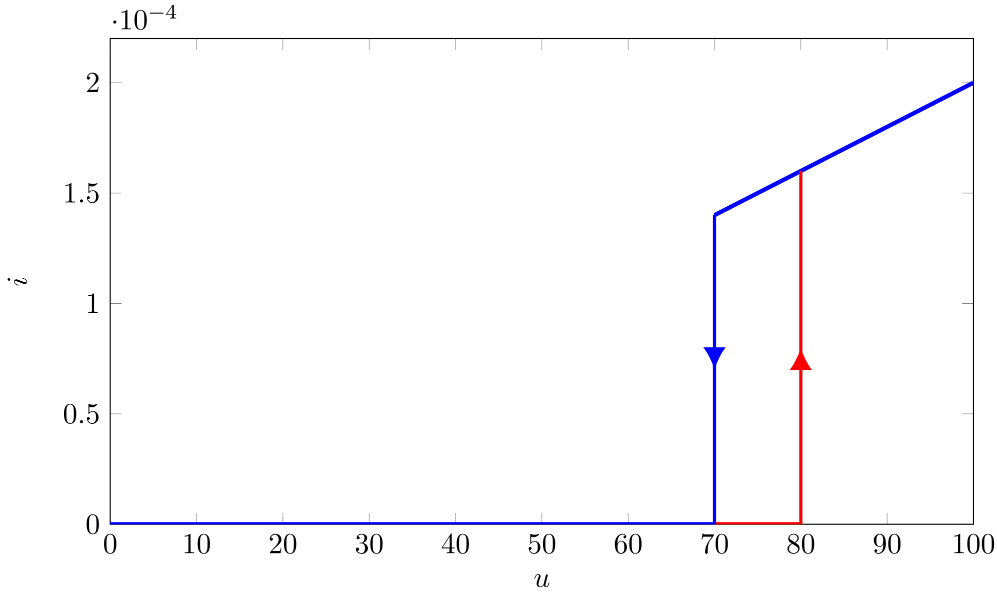


FIGURE 2 – Caractéristique $i = f(u)$. En rouge le parcours suivi lorsqu'on augmente u, et en bleu lorsqu'on le diminue.

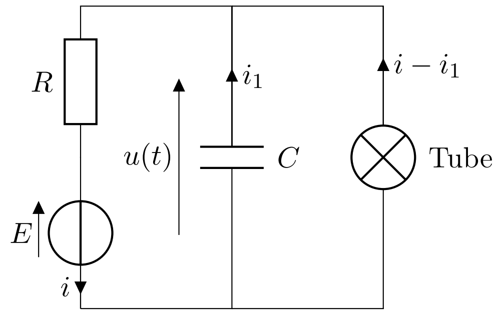
2. On a l'équation de maille

$$E - Ri - u = 0 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau_1 = RC$. La solution en tenant compte des conditions initiales est

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

3. Il faut $E > U_a$ car $E = \sup u$
4.
$$E\left(1-e^{-\frac{t_0}{\tau_1}}\right) = U_a \iff t_0 = -\tau_1 \ln\left(1-\frac{U_a}{E}\right)$$
5. On définit i et i_1 :



où le tube est équivalent à la résistance $r = 500\text{k}\Omega$. On a

$$u(t) + r(i - i_1) = 0$$

et

$$E - Ri - u(t) = 0 \iff i = \frac{E - u(t)}{R}$$

Or $i_1(t) = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ donc on a

$$-u + r\frac{E-u}{R} - Cr\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{Cr}\left(1+\frac{r}{R}\right) = \frac{E}{CR}$$

On pose $\tau = \frac{CrR}{r+R}$. La solution générale de l'équation différentielle homogène est

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et une solution particulière de l'équation différentielle est

$$u(t) = \frac{Er}{r+R}$$

D'où la solution générale

$$u(t) = \frac{Er}{r+R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Or on sait $u(t_0) = U_a$ donc

$$u(t) = \frac{Er}{r+R} + \frac{U_a - \frac{Er}{r+R}}{e^{-\frac{t_0}{\tau}}}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Er}{r+R} + \frac{U_a(r+R) - Er}{(r+R)\left(1-\frac{U_a}{E}\right)^{\frac{r+R}{r}}}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

6. Il faut
$$\frac{Er}{r+R} < U_e$$
et
$$U_e < U_a$$
7. On note $u_\ell = \frac{Er}{r+R}$ et $\lambda = \frac{U_a(r+R)-Er}{(r+R)\left(1-\frac{U_a}{E}\right)^{\frac{r+R}{r}}}$. On a
$$u(t_1) = u_\ell + \lambda e^{-\frac{t_1}{\tau}} = U_e \iff t_1 = -\tau \ln\left(\frac{U_e - u_\ell}{\lambda}\right)$$

8. Lorsqu'on atteint t_1, on revient dans la configuration où le tube est éteint et agit comme une résistance infinie. La tension u sera donc périodique. De même que pour t_0, on a $u(t) = U_e$ en $t = t_2$, avec
$$t_2 = -\tau_1 \ln\left(1 - \frac{U_e}{E}\right)$$
On a alors
$$T = t_1 - t_2 = -\tau \ln\left(\frac{U_e - u_\ell}{\lambda}\right) + \tau_1 \ln\left(1 - \frac{U_e}{E}\right)$$

9. On trace la courbe avec les données de la question 10.

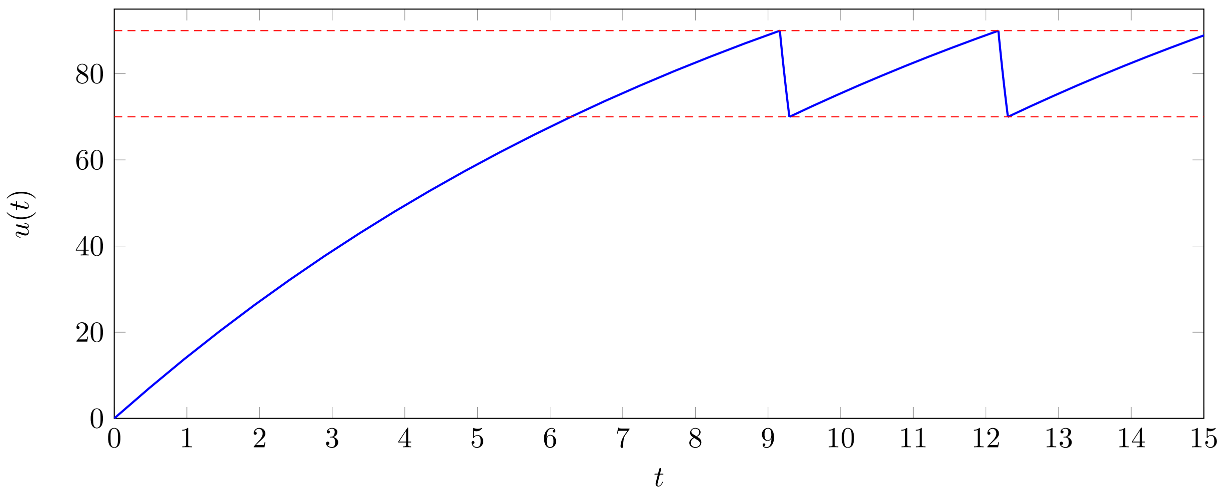


FIGURE 3 – Évolution de la tention $u(t)$ pour $E = 150\text{V}; U_a = 90\text{V}; U_e = 70\text{V}; R = 10\text{M}\Omega; r = 0,5\text{M}\Omega; C = 1,0\mu\text{F}$

10. **AN :** $T = 3.008\text{s}$