Corrigé

DS n° 8
Corrigé

Sciences-physiques MPSI

Solution de l'exercice 1

Partie I — Injecteur

1. La force exercée sur l'électron s'écrit $\vec{F} = -e\vec{E}_0 = eE_0\vec{e}_x$. Pour trouver la vitesse en sortie on applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de l'accélérateur :

$$\Delta E_c = \vec{F} \cdot d\vec{e}_x = eE_0 d.$$

D'où :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

La vitesse est bien sur colinéaire au vecteur $\vec{e}_x$.
Pour le calcul du temps T, on utilise le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'éléectron :

$$m\vec{a} = eE_0\vec{e}_x = e\frac{U}{d}\vec{e}_x \text{ qui donne en intégrant } v = \frac{eU}{md}t + v_0.$$

Or $v_1 = v(t = T)$ d'où :

$$\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}} = \frac{eU}{md}T + v_0 \Leftrightarrow T = \frac{md}{eU}\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}} - v_0\right)$$

2. La puissance $\mathcal{P}$ rayonnée s'écrit :

$$\mathcal{P} = -m\tau\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 = -m\tau\left(\frac{eU}{dm}\right)^2.$$

En utilisant de nouveau le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = eU - m\tau\left(\frac{eU}{dm}\right)^2 T$$
$$v_1'^2 = v_0^2 + \frac{2eU}{m} - 2\tau\left(\frac{eU}{dm}\right)^2 T$$
$$v_1'^2 = v_1^2 - 2\tau\left(\frac{eU}{dm}\right)^2 T$$
$$v_1' = v_1\sqrt{1 - 2\tau\left(\frac{eU}{dmv_1}\right)^2 T}$$
$$v_1' \approx v_1\left(1 - \tau\left(\frac{eU}{dmv_1}\right)^2 T\right)$$
$$v_1' = v_1 - \frac{\tau(eU)^2}{(dm)^2}\frac{T}{v_1}$$

Ainsi $\alpha = \dfrac{\tau(eU)^2}{(dm)^2}$.
Dimension de τ :

$$[\tau] = \frac{[Puissance]}{ML^2T^{-4}} = \frac{ML^2T^{-3}}{ML^2T^{-4}} = T.$$

Partie II — Anneau de stockage

1. a) La puissance de la force exercée par le champ magnétique s'écrit $-e(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ car la force est perpendiculaire à la vitesse. Ainsi la puissance de cette force est nulle. L'application du théorème de la puissance cinétique nous permet d'en déduire que l'énergie cinétique reste constante.

   b) On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron :

$$m\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{pmatrix} = -e\cdot\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ B_0\end{pmatrix}$$
$$m\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{pmatrix} = -e\begin{pmatrix}B_0v_y\\ -B_0v_x\\ 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-v_y\\ v_x\\ 0\end{pmatrix}$$

   La dernière équation avec les conditions initiales donne $z = cte = 0$. En posant $u = v_x + iv_y$ et en combinant les deux premières équations $L_1 + iL_2$ on trouve :

$$\dot{v}_x + i\dot{v}_y = \omega(-v_y + iv_x) \Leftrightarrow \dot{u} = \omega u.$$

   La solution s'écrit $u = U_0\exp(i\omega t)$ or $u(0) = v_0e^{i\pi/4}$ soit $u = v_0\exp(i(\omega t + \pi/4))$.
   En intégrant par rapport au temps $x(t) + iy(t) = \frac{v_0}{i\omega}\exp(i(\omega t + \pi/4)) + cte$.
   Or à $t = 0$, $x = y = 0$ donc $cte = -\frac{v_0}{\omega}exp(i\pi/4)$. En isolant partie imaginaire et partie

réelle :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{v_0}{\omega}\left(\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega}\left(\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

c) La trajectoire est bien celle d'un cercle dans le plan Oxy car :

$$\left(x(t) + \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2.$$

C'est bien l'équation cartésienne d'un cercle de centre $C\left(-\frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}, 0\right)$ et de rayon v_0/ω.

2. On peut continuer de travailler en complexe et écrire que $\underline{a} = iw\underline{v}$ et $a^2 = |\underline{a}|^2 = \omega^2 v_0^2$ d'où :

$$\mathcal{P} = -m\tau a^2 = -m\tau\omega^2 v_0^2.$$

En considérant que la décroissance de l'énergie cinétique est faible, on peut écrire $v_0^2 = 2E_C/m$ soit :

$$\mathcal{P} = -2\tau\omega^2 E_c.$$

Or d'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{E_c}{\tau'} = 0.$$

Avec $\tau' = \dfrac{1}{2\tau\omega^2}$.

3. En écrivant que $\delta E = \mathcal{P}T = m\tau a^2 \frac{2\pi}{\omega} = m\tau \frac{v^4}{R_0^2}\frac{2\pi R_0}{v}$ soit :

$$\delta E = 2\pi m\tau \frac{v^3}{R_0}.$$

4. a) Avec le nombre de chiffres significatifs de l'énoncé :$\gamma = 5423,26145$.
   b) Avec l'indication de l'énoncé, cela donne $\delta E = 93\,\mathrm{keV}$.
   c) Le temps nécessaire pour faire un tour $T_0 = \frac{2\pi R_0}{c} \approx 1{,}17\,\mu\mathrm{s}$. Pour perdre 0,275 Gev en perdant 93 keV par tout il faut $n \approx 2960$ tours ce qui donne $\tau_{10\%} = nT_0 \approx 3{,}47\,\mathrm{ms}$.

Solution de l'exercice 2

Partie I — Pression d'un pneumatique en fonction de la température

1. La pression est de $2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ supérieur à la pression extérieur, elle vaut donc $3 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.
2. a) On note P_0 la pression dans le pneu quand la température est $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Notons P_1 la pression quand la température vaut $T_2 = 10\,°\mathrm{C}$. D'après l'équation d'état du gaz parfait :

$$\begin{cases} P_1 V = nRT_1 \\ P_2 V = nRT_2 \end{cases}$$

En divisant ces deux équations, il vient :

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Application numérique : $P_2 = 2{,}9 \times 10^5$ Pa, la manomètre indiquera alors $1{,}9 \times 10^5$ Pa.

b) De même à la température $T_3 = 40\,°\mathrm{C}$. $P_3 = 3{,}2 \times 10^5$ Pa et l'indication portée sur le manomètre sera $2{,}2 \times 10^5$ Pa.

3. Au niveau du sol, la membrane du pneu est à l'équilibre. La force de pression compense la réaction du support qui est égale au quart du poids (comme la charge est répartie équitablement). D'où $PS = mg/4$ et $S = mg/(4P) \approx 0{,}012\,\mathrm{m}^2$.
4. Quand la température augmente, la pression augmente et la surface de contact avec le sol diminue. Ce doît être ce facteur qui limite l'aquaplanning. Pour éviter ce phénomène il vaut mieux légèrement surgonfler les pneus. Rouler plus vite pour augmenter la température des pneus ne semble pas prudent.

Partie II — Pompe à vide

1. Quand le piston descend en A, la pression augmente dans le cylindre provoquant l'ouverture de la soupape S_1 et la fermeture de la soupape S_2. Celà permet d'évacuer vers l'extérieur tout le gaz contenu initialement dans le cylindre, soit une quantité de matière n_0 telle que $P_0V_B = n_0RT_0$.
   Lorsque le piston remonte en B, il fait baisser la pression dans le cylindre provoquant l'ouverture de la soupape S_2 et la fermeture de la soupape S_1. La pression finale P_1 est telle que $P_1(V_B + V_0) = (n - n_0)RT_0$, en notant n la quantité de matière initialement présente dans le cylindre et le réservoir, soit $P_0(V_0 + V_B) = nRT_0$. D'où :
$$\begin{aligned} P_1(V_B + V_0) &= nRT_0 - n_0RT_0 \\ P_1(V_B + V_0) &= P_0(V_0 + V_B) - P_0V_B \\ P_1 &= P_0\frac{V_0}{V_0 + V_B} \end{aligned}$$
2. Avec le même raisonnement, on trouve $P_2 = P_1\dfrac{V_0}{V_0 + V_B} = P_0\left(\dfrac{V_0}{V_0 + V_B}\right)^2$.
3. On généralise facilement à $P_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_0\left(\dfrac{V_0}{V_0 + V_B}\right)^n = 0$.
4. Dans ce cas, on ne peut vider complètement le réservoir, il restera toujours une certaine quantité de matière dans le cylindre égale à $P_0V_A/(RT_0)$, ce qui correspond à une pression finale $P_f = P_0\frac{V_A}{V_0+V_B}$. Le mouvement du cylindre descendant ne pourra plus faire passer la pression dans le cylindre au dessus de P_0. La soupape S_1 reste constamment fermée.

Solution de l'exercice 3

1. D'après la relation de Mayer pour le gaz parfait et la définition de γ :
$$\begin{cases} C_V = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{P_0V_A}{T_0(\gamma-1)} \\ C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} = \frac{P_0V_A\gamma}{T_0(\gamma-1)} \end{cases}$$
2. La transformation est isochore et quasi-statique.
3. Le piston étant à l'équilibre, la force de pression compense le poids de la msse m ainsi que la force de pression extérieure soit :
$$P_1S = P_0S + mg \Leftrightarrow P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} \approx 1{,}1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

On en déduit le température T_1 par application de l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_1 = \frac{P_1 V_A}{nR} = T_0 \frac{P_1 V_A}{P_0 V_A} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{P_0 S}\right) \approx 330\,\mathrm{K}.$$

4. La transformation étant isochore, le travail échangé par le système est nul et l'application du premier principe donne :

$$Q_{0\to 1} = \Delta U = C_V \Delta T = \frac{P_0 V_A}{T_0(\gamma - 1)}(T_1 - T_0) = \frac{V_A}{\gamma - 1}\frac{mg}{S} \approx 8{,}25\,\mathrm{J}.$$

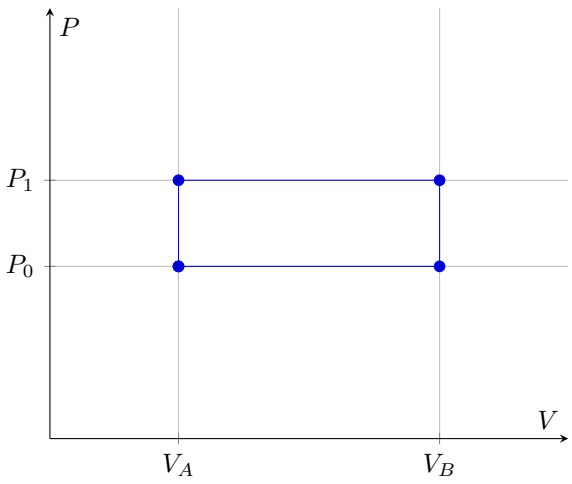
5. Cette transformation est monobare quasi-statique. comme la transformation est quasi-statique, à chaque instant $P = P_0 + \frac{mg}{S}$ donc elle est aussi isobare.
6. $P_2 V_B = nRT_2$ or $P_2 = P_1$ et $P_1 V_A = nRT_1$ donc $T_2 = T_1 \dfrac{V_B}{V_A} \approx 1000\,\mathrm{K}$.
7. La transformation étant monobare $\Delta H = C_P(T_2 - T - 1) = Q_{1\to 2}$ donc :

$$Q_{1\to 2} = C_P(T_2 - T_1) = \frac{P_0 V_A \gamma}{T_0(\gamma - 1)}(T_2 - T_1) \approx 260\,\mathrm{J}.$$

8. La transformation $2 \to 3$ est isochore quasi-statique alors que la $3 \to 0$ est isobare quasi-statique.
9. Le travail peut s'écrire $W = W_{0\to 1} + W_{1\to 2} + W_{2\to 3} + W_{3\to 0} = W_{1\to 2} + W_{3\to 0}$ car les deux autres transformations sont quasi-statique.
   De plus $W_{1\to 2} = \Delta U - Q_{1\to 2} = (C_V - C_P)(T_2 - T_1) = -nR(T_2 - T_1)$.
   De la même manière $W_{3\to 0} - nR(T_0 - T_3)$ d'où $W = -nR(T_2 - T_1 + T_0 - T_3)$. En utilisant le fait que $T_3 = \frac{P_0 V_B}{nR} = T_0 \frac{V_B}{V_A}$ et les résultats des questions précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned}
W &= -nR\left(T_1 \frac{V_B}{V_A} - T_1 + T_0 - T_0 \frac{V_B}{V_A}\right) \\
W &= -nR\left(T_1 \frac{V_B - V_A}{V_A} + T_0 \frac{V_A - V_B}{V_A}\right) \\
W &= nR \frac{V_A - V_B}{V_A}(T_1 - T_0) \\
W &= nR \frac{V_A - V_B}{V_A}(T_1 - T_0) \\
W &= nRT_0 \frac{V_A - V_B}{V_A}\frac{mg}{P_0 S} \\
W &= (V_A - V_B)\frac{mg}{S} \approx -6{,}7\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

10. $r \approx 2,5\%$.
11.



12. Le travail est égale à l'opposé de l'aire intérieure du diagramme de Clapeyron soit $W = (P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \frac{mg}{S}(V_B - V_A)$