

Loi de l'induction

Table des matières

1	Faits expérimentaux	1
2	Loi de Faraday	1
2.1	Flux d'un champ magnétique	1
2.2	Loi de Faraday	1
2.3	Loi de Lenz, loi de modération de Lenz	2
2.4	Force de Laplace	2
3	Induction de Von Neumann	3
3.1	Induction propre	3
3.2	Inductance mutuelle	4
3.3	Courants de Foucault	5
4	Induction de Lorentz	6

1 Faits expérimentaux

Courant généré par un champ magnétique : Pour générer un courant dans une bobine avec un aimant, il faut que l'aimant "bouge".

2 Loi de Faraday

2.1 Flux d'un champ magnétique

Définition (Surface orientée). Une surface orientée S est définie par son vecteur \vec{S} normal au plan qui contient la surface tel que $\|\vec{S}\|$ soit la mesure de la surface.

Définition (Flux). Pour un champ magnétique \vec{B} , son flux ϕ à travers \vec{S} est défini par

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Exemple. Pour un champs magnétique \vec{B} uniforme, on a

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \iint d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

2.2 Loi de Faraday

Loi (Faraday). La force électromotrice e générée par induction dans un circuit avec un champs magnétique \vec{B} s'écrit

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Exemple (Champs uniforme). Pour \vec{B} uniforme sur la surface, $\phi = \vec{B}(t) \cdot \vec{S}$ donc

$$e = -S \frac{dB}{dt}(t)$$

2.3 Loi de Lenz, loi de modération de Lenz

Loi. Les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui les provoquent

2.4 Force de Laplace

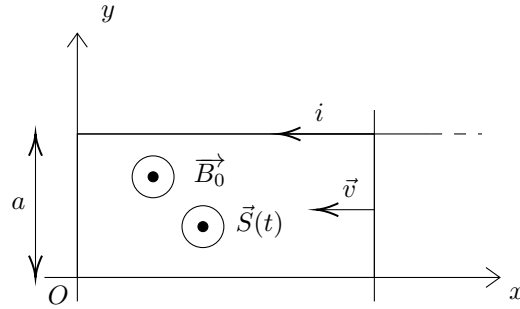


FIGURE 1 – Rail de Laplace

On a ici

$$\phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}(t) = B_0 S(t) \implies e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 \frac{dS}{dt}(t)$$

donc $e > 0$ car \vec{S} est décroissante

Loi (Laplace). La force de Laplace $d\vec{F}$ qui s'exerce sur portion de conducteur $d\vec{\ell}$ (orienté selon i) parcouru par un courant i s'écrit

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Exemple (Somme des forces de Laplace sur un circuit fermé). Dans le circuit suivant :

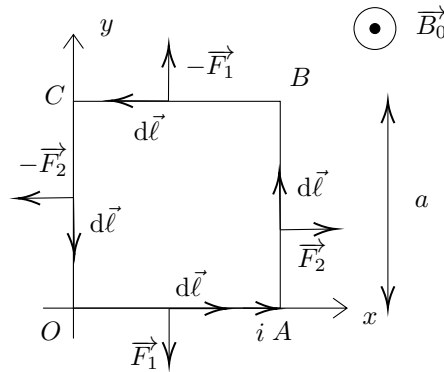


FIGURE 2 – Circuit fermé avec des fils de longueur a

— Sur \vec{OA} :

$$\vec{F}_1 = \int_0^a i dx \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z = -i B_0 \vec{e}_y \int_0^a dx = -i a B_0 \vec{e}_y$$

— Sur \vec{AB} :

$$\vec{F}_2 = \int_0^a i dy \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z = i a B_0 a \vec{e}_x$$

— Sur \vec{BC} :

$$\vec{F}_3 = \int_a^0 i dx \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z = i a B_0 \vec{e}_y = -\vec{F}_1$$

— Sur \vec{CO} :

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$$

On a donc

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

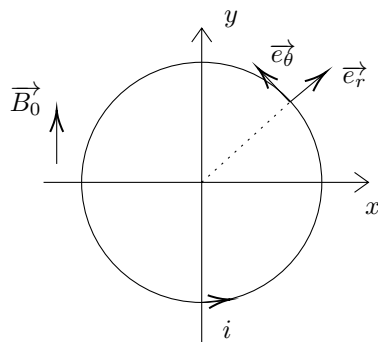


FIGURE 3 – Spire circulaire

De même, sur une spire circulaire de rayon r ,

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} ir d\theta \vec{e}_\theta \wedge B_0 \vec{e}_z = ir B_0 \int_0^{2\pi} -\sin \theta \vec{e}_z d\theta = ir B_0 \vec{e}_z [\cos \theta]_0^{2\pi} = \vec{0}$$

Généralisation. Sur un cordon fermé, la somme des forces de Laplace est toujours nulle.

Exemple (Moment des forces de Laplace). En un point M sur une spire, $d\vec{F} = id\vec{e}l \wedge \vec{B}_0$ s'applique en M et

$$d\mathcal{M}_0(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = r \vec{e}_r \wedge (ir d\theta \vec{e}_\theta \wedge B_0 \vec{e}_y) = ir^2 B_0 d\theta (-\sin^2 \theta \vec{e}_x + \sin \theta \cos \theta \vec{e}_y)$$

D'où, après calculs (on intègre et on linéarise) :

$$\mathcal{M}_0(\vec{F}) = -i\pi r^2 B_0 \vec{e}_x = -iSB_0 \vec{e}_x = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

3 Induction de Von Neumann

3.1 Induction propre

Exemple. Dans un cordon fermé, le champ magnétique opposé à la surface, on a

$$e = -\frac{d\phi}{dt}(t) = S \frac{dB}{dt}(t)$$

Donc un courant $i(t)$ passe dans la spire. Ce courant induit un champ magnétique \vec{B}_i , qui a un flux propre :

$$\phi_p(t) = \iint \vec{B}_i(t) \cdot d\vec{S}$$

Or $\vec{B}_i = i(t)\vec{k}$ donc

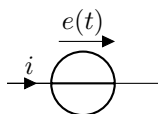
$$\phi_p(t) = \iint i(t)\vec{k} \cdot d\vec{S}$$

Définition (Coefficient d'auto-inductance). Le coefficient d'auto-inductance L est défini par $\phi_p(t) = Li(t)$, avec L en H

Exemple. Une bobine traversée par un courant i :

$$\phi_p(t) = Li(t) \implies e(t) = -L \frac{di}{dt}(t)$$

L'équivalent électrique est



Pour lequel on a

$$u(t) = -e(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

Exemple (Flux à travers une spire). Avec \vec{B} colinéaire à \vec{S} , N le nombre de spires

$$\phi_p(t) = NSB(t)$$

Or à l'intérieur on a, avec $n = \frac{N}{\ell}$

$$\vec{B} = \mu_0 ni(t) \vec{e}_z \implies \phi_p(t) = \frac{1}{\ell} \mu_0 N^2 S i(t) = Li(t)$$

D'où

$$L = \frac{1}{\ell} \mu_0 N^2 S$$

3.2 Inductance mutuelle

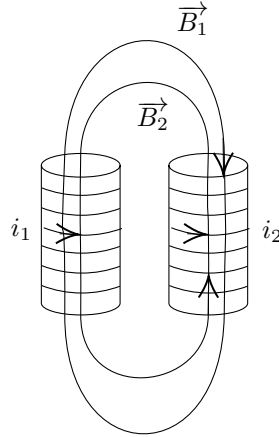


FIGURE 4

On a ici

$$\phi_{1 \rightarrow 2}(t) = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint \vec{k}_1 \cdot d\vec{S} i_1(t) = M_{12} i_1(t)$$

où M_{12} est appelé coefficient d'inductance mutuelle. On a de même

$$\phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M_{2,1} i_2(t)$$

On admet que $M_{21} = M_{12} = M$, qui est une grandeur algébrique. On a de plus

$$\phi_{p1}(t) = L_1 i_1(t) \quad \text{et} \quad \phi_{p2}(t) = L_2 i_2(t)$$

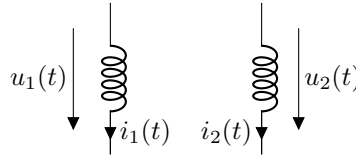


FIGURE 5

On a ici les flux totaux

$$\begin{cases} \phi_{t1}(t) = \phi_1(t) + \phi_{2 \rightarrow 1}(t) \\ \phi_{t2}(t) = \phi_2(t) + \phi_{1 \rightarrow 2}(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \phi_{t1}(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ \phi_{t2}(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t) \end{cases}$$

Pour un système en influence totale, $L_1 = kN_1^2$, $L_2 = kN_2^2$ et $M = kN_1N_2$. On a

$$\begin{cases} e_1(t) = -\frac{d\phi_{t1}}{dt}(t) \\ e_2(t) = -\frac{d\phi_{t2}}{dt}(t) \end{cases}$$

En régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{cases} e_1(t) = -j\omega \phi_{t_1}(t) \\ e_2(t) = -j\omega \phi_{t_2}(t) \end{cases}$$

Équivalent électrique :

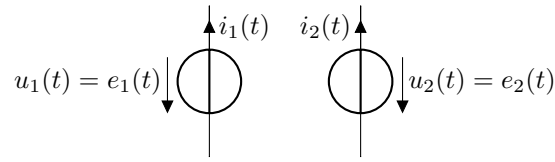


FIGURE 6

Donc on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1(t) = -j\omega(L_1 i_1(t) + M i_2(t)) \\ u_2(t) = -j\omega(L_2 i_2(t) + M i_1(t)) \end{cases} &\iff \begin{cases} u_1(t) = -j\omega(kN_1^2 i_1(t) + kN_1 N_2 i_2(t)) \\ u_2(t) = -j\omega(kN_2^2 i_2(t) + kN_1 N_2 i_1(t)) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_1(t) = -j\omega k N_1 (N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t)) \\ u_2(t) = -j\omega k N_2 (N_2 i_2(t) + N_1 i_1(t)) \end{cases} \\ &\implies \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

C'est le même phénomène que dans un transformateur idéal. Dans ce cas, on appelle $\frac{N_2}{N_1}$ le rapport de transformation

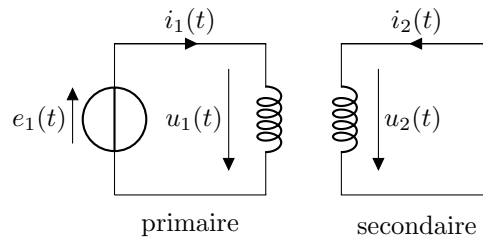


FIGURE 7 – Transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, il y a transfert total d'énergie du circuit primaire au secondaire, donc

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \implies -u_1 i_1 = -u_2 i_2 \implies \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{\text{rapport de transformation}}$$

3.3 Courants de Foucault

On considère un montage dans lequel une barre métallique (conductrice) est entourée de spires de conducteur parcouru par un courant i . Il y a donc génération d'un champ magnétique $\vec{B}(t)$. Par induction, il y a génération d'un courant dans la barre métallique qu'on appelle *Courant de Foucault*.

La barre métallique est équivalente à une résistance, elle dégage donc de l'énergie par effet Joule.

4 Induction de Lorentz

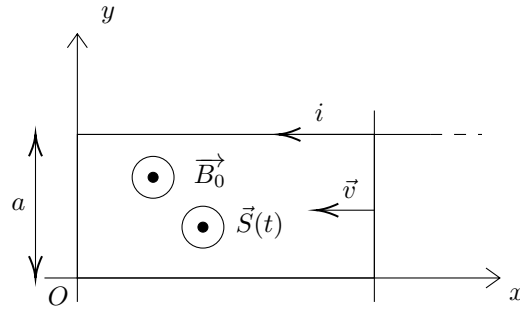


FIGURE 8 – Rail de Laplace (champ magnétique constant)

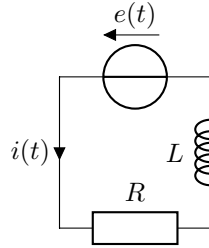
On a le flux

$$\phi(t) = \iint \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = B_0 S$$

Or $S(t) = ax(t)$ donc

$$\phi = B_0 ax(t) \implies e(t) = -B_0 av(t)$$

Le circuit est électriquement équivalent, en prenant en compte l'auto-induction, à



En négligeant l'auto-induction, on a

$$e(t) = Ri(t) \implies i(t) = -\frac{1}{R} B_0 av(t)$$

D'un point de vue mécanique, les forces s'exerçant sur le conducteur mobile sont le poids, la réaction du support et la force de Laplace. On a $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et

$$d\vec{F} = id\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 = -idyB_0 \vec{e}_x \implies \vec{F} = \int_0^a i(t)B_0 \vec{e}_x dy = i(t)B_0 a \vec{e}_x$$

D'où, par PFD

$$m \frac{dv}{dt}(t) = \vec{F} = i(t)B_0 a \vec{e}_x = -\frac{1}{R}(B_0 a)^2 v(t) \iff \frac{dv}{dt} + \frac{(B_0 a)^2}{Rm} v(t) = 0$$

Donc on a

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}, \quad v_0 < 0$$