

Révision

Solution de l'exercice 1

On applique le PFD au trois atomes, ce qui donne un système de trois équations différentielles :

$$\begin{cases} m_A \ddot{x}_A &= k_1(x_B - x_A) \\ m_B \ddot{x}_B &= -k_1(x_B - x_A) + k_2(x_C - x_B) \\ m_C \ddot{x}_C &= -k_2(x_C - x_B) \end{cases}$$

1. a) On fait la différence des deux premières équations et des deux dernières (à chaque fois en divisant par la masse) :

$$\begin{cases} \ddot{u} &= -\frac{k}{m}u - \frac{k}{M}u - \frac{k}{M}v \\ \ddot{v} &= -\frac{k}{m}v - \frac{k}{M}u - \frac{k}{M}v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{u} &= -r\omega_0^2 u - \omega_0^2 v \\ \ddot{v} &= -r\omega_0^2 v - \omega_0^2 u \end{cases}$$

- b) On essaye une solution des solutions du type :

$$\begin{cases} u(t) &= u_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ v(t) &= v_0 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} -\omega^2 u &= -r\omega_0^2 u - \omega_0^2 v \\ -\omega^2 v &= -r\omega_0^2 v - \omega_0^2 u \end{cases}$$

On isole v dans la première équation et on l'intègre dans la première :

$$(\omega^2 - r\omega_0^2) = \omega^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - r\omega_0^2} u$$

$$(\omega^2 - r\omega_0^2)^2 = \omega_0^4$$

$$\omega^2 - r\omega_0^2 = \pm \omega_0^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2(r \pm 1)$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{r \pm 1}.$$

On trouve alors la pulsation des modes propres et la solution générale s'écrit comme une somme des modes propres :

$$\begin{cases} u(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ v(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

c) On se rend compte qu'il y a deux modes particuliers aux pulsations suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \sqrt{r-1} \\ \omega_2 = \omega_0 \sqrt{r+1} \end{cases}$$

2. a) On utilise les conditions initiales $u(0) = a_0$, $\dot{u}(0) = 0$, $v(0) = -a_0$ et $\dot{v}(0) = 0$:

$$\begin{cases} a_0 = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \\ -a_0 = A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \cos \varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - A_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + A_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2A_1 \cos \varphi_1 \\ a_0 = A_2 \cos \varphi_2 \\ 0 = 2A_1 \sin \varphi_1 \\ 0 = 2A_2 \sin \varphi_2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = a_0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} u(t) = a_0 \cos(\omega_2 t) \\ v(t) = -a_0 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

b) De la même manière, on trouve :

$$\begin{cases} u(t) = a_0 \cos(\omega_1 t) \\ v(t) = a_0 \cos(\omega_1 t) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 2

On doit vérifier que les raideurs des 4 amortisseurs k s'ajoutent si on considère la masse totale M de la voiture. On calcule la raideur d'un amortisseur à l'aide de Newton au repos : $Mg = 4k\Delta x$.

On trouve alors $k = \frac{Mg}{4\Delta x}$.

La pulsation propre du système est alors donné par $\omega_0^2 = \frac{k}{M} = \frac{g}{4\Delta x}$. On calcule alors facilement la fréquence propre :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{4\Delta x}} = 0,79 \text{ Hz.}$$

On ne sera donc pas malade dans cette voiture.

Solution de l'exercice 3

1. a) Elle est longitudinale car la perturbation a lieu dans la même direction que la propagation de l'onde.
 b) Une onde progressive sinusoïdale s'écrit dans le cas général :

$$p(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0);$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Comme $p(0, t) = p_0 \sin(2\pi ft) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, on en déduit $A = p_0$ et $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$p(x, t) = p_0 \cos\left(2\pi ft - kx - \frac{\pi}{2}\right) = p_0 \sin(2\pi ft - kx).$$

- c) Comme $\lambda = \frac{c}{f}$, on en déduit $c = \lambda f = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. a) Pour avoir des interférences entre A_1 et A_2 , il faut que les ondes émises soient à la même fréquence.
 b) On sait déjà que $p_1(x, t) = p_0 \sin(2\pi ft - kx)$. De la même manière $p_2(x, t) = B \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$, or $p_2(d, t) = p_0 \sin(2\pi ft)$ d'où :

$$\begin{cases} B = p_0 \\ kd + \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$p_2(x, t) = p_0 \sin(2\pi ft + k(x - d)).$$

- c) La surpression globale est la somme des deux surpressions :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 \sin(2\pi ft - kx) + p_0 \sin(2\pi ft + k(x - d)) \\ &= 2p_0 \sin\left(2\pi ft - \frac{kd}{2}\right) \cdot \cos\left(-kx + \frac{kd}{2}\right) \end{aligned}$$

- d) Il y a des points dont l'amplitude est maximale $\cos\left(-kx + \frac{kd}{2}\right) = \pm 1$ (interférences constructives) et ceux dont l'amplitude est minimale : $\cos\left(-kx + \frac{kd}{2}\right)$ (interférences destructives).
 e) Pour des points dont l'amplitude de vibration est maximale on a :

$$-kx_M + \frac{kd}{2} = n\pi.$$

D'où :

$$x_M = \frac{d}{2} - \frac{n\pi}{k} = \frac{d}{2} - \frac{n\lambda}{2}.$$

Deux maxima successifs seront donc séparés d'une distance e telle que :

$$e = \frac{d}{2} - n\frac{\lambda}{2} - \frac{d}{2} + (n+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ce qui donne :

$$e = \frac{\lambda}{2}.$$

Comme $c = \lambda f$ on en déduit :

$$c = 2ef = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

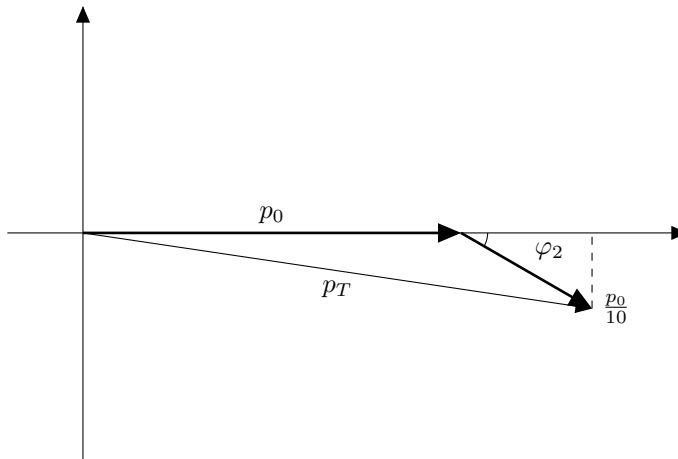
3. a) i – En assimilant p_1 avec ce qui a été fait précédemment, on trouve que $\theta(x, t) = 2\pi ft - kx$. Or :

$$\begin{aligned} p_2(x, t) &= \frac{p_0}{10} \sin(2\pi ft + k(x - d)) \\ &= \frac{p_0}{10} \sin(2\pi ft - kx + 2kx - kd) \\ &= \frac{p_0}{10} \sin(\theta(x, t) + k(2x - d)) \\ &= \frac{p_0}{10} \sin\left(\theta(x, t) + \frac{2\pi f}{c}(2x - d)\right) \end{aligned}$$

- ii – On fait la somme des deux perturbations pour avoir la perturbation totale, de plus si $x \ll d$ on considère que $2x - d \approx d$:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 \sin(\theta(x, t)) + \frac{p_0}{10} \sin\left(\theta(x, t) - \frac{2\pi f}{c}(2x - d)\right) \\ &= p_T \sin(\theta(x, t) - \varphi) \end{aligned}$$

On cherche l'expression de p_T l'amplitude de l'onde résultante, On doit donc faire la somme de deux signaux sinusoïdaux d'amplitude différente, on utilise la représentation de Fresnel pour cela et on note $\varphi_2 = \frac{2\pi f}{c}(2x - d)$:



On trouve :

$$\begin{aligned} p_T^2 &= \left(p_0 + \frac{p_0}{10} \cos(\varphi_2)\right)^2 + \left(\frac{p_0}{10} \sin(\varphi_2)\right)^2 = p_0^2 + \left(\frac{p_0}{10}\right)^2 + 2p_0 \frac{p_0}{10} \cos(\varphi_2) \\ &= p_0^2 \left(\frac{101}{100} + \frac{1}{5} \cos(\varphi_2)\right) \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde résultante est donc maximale si $\cos(\varphi_2) = 1$ et minimale si $\cos(\varphi_2) = -1$, on trouve alors :

$$\begin{cases} p_{MAX} &= p_0 \sqrt{\frac{121}{100}} \\ p_{MIN} &= p_0 \sqrt{\frac{81}{100}} \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{p_{MAX}}{p_{MIN}} = \sqrt{\frac{121}{81}}$$

Au lieu de $+\infty$ pour deux ondes de même amplitude.

b) i – On trouve simplement :

$$\begin{cases} p_{01}(x) &= \frac{p_0}{d}(d-x) \\ p_{02}(x) &= \frac{p_0}{d}x \end{cases}$$

ii – On reprend le résultat de la question précédente mais en remplaçant p_0 par $p_{01}(x)$ et $\frac{p_0}{10}$ par $p_{02}(x)$, ce qui donne :

$$p_T^2 = (p_{01}(x))^2 + (p_{02}(x))^2 + 2p_{01}(x)p_{02}(x)\cos(\varphi_2).$$

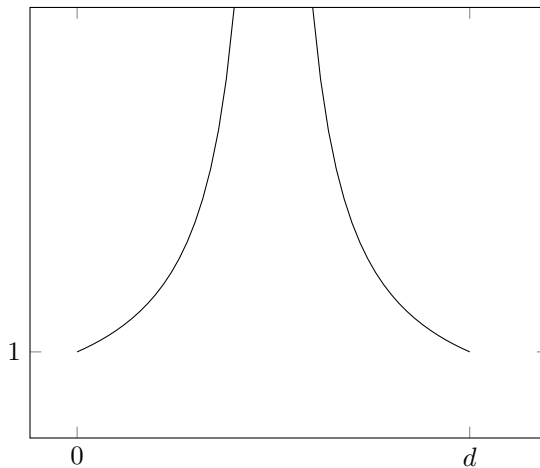
On trouve alors simplement avec le même raisonnement :

$$\begin{cases} p_{MAX} &= \sqrt{(p_{01}(x))^2 + (p_{02}(x))^2 + 2p_{01}(x)p_{02}(x)} = p_{01}(x) + p_{02}(x) \\ p_{MIN} &= \sqrt{(p_{01}(x))^2 + (p_{02}(x))^2 - 2p_{01}(x)p_{02}(x)} = |p_{01}(x) - p_{02}(x)| \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{p_{MAX}}{p_{MIN}} &= \frac{p_{01}(x) + p_{02}(x)}{|p_{01}(x) - p_{02}(x)|} \\ &= \frac{p_0(d-x) + p_0x}{|p_0(d-x) - p_0x|} \\ &= \frac{d}{|d-2x|} \end{aligned}$$

Cette grandeur varie entre 1 (pour $x = 0$ et $x = d$) et $+\infty$ pour $x = \frac{d}{2}$.



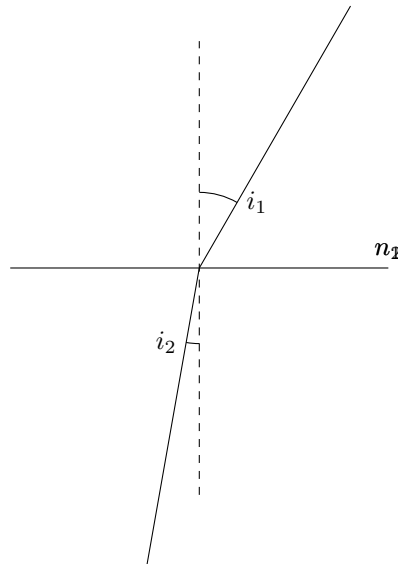
Solution de l'exercice 4

1. a) Lois de Descartes de la réfraction :

- le rayon réfracté est dans le plan d'incidence ;
- l'angle i_2 entre le rayon lumineux réfracté et la normale au dioptre est tel que :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

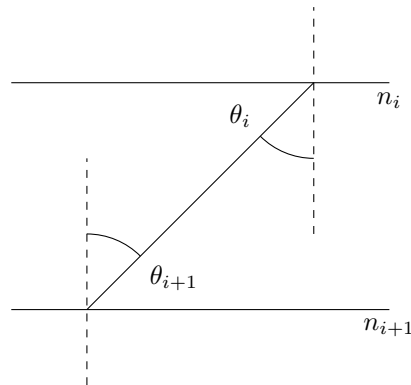
b) Attention, comme $n_2 > n_1$, on a $i_2 < i_1$:



c) L'angle de réfraction est maximal quand $i_1 = 90^\circ$. D'où :

$$n_1 = n_2 \sin i_m \Leftrightarrow i_m = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = 41,8^\circ.$$

2. a) L'angle de réfraction dans la zone d'indice i est égal à l'angle d'incidence entre la zone d'indice n_1 et celle d'indice n_{i+1} (angles alterne-interne) :



On peut donc écrire pour le dioptre $n^\circ i$:

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

D'où $n_i \sin \theta_i = C_1$.

b) Pour avoir C_1 il suffit de prendre la valeur de $n_i \sin \theta_i$ au niveau du dernier dioptre :

$$C_1 = n_0 \sin \theta_0.$$

c) Par définition $\Psi_r = \theta_1 - \theta_0$ or $n(\infty) \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_0$ qui se simplifie en : $\theta_1 \approx n_0 \theta_0$.
Finalement :

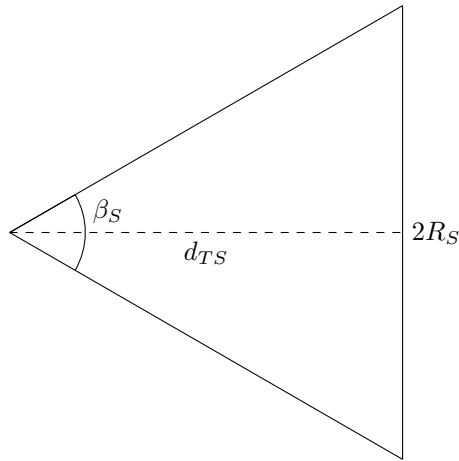
$$\Psi_r = (n_0 - 1)\theta_0.$$

d) On obtient alors :

$$\Psi_r = 0,0002773 \times 10 = 0,002773^\circ \approx 10''.$$

Peut-on écrire $\sin \theta_0 \approx \theta_0$? On a : $\sin \theta_0 = 0,174$ et $\theta_0 = 0,175$, on est donc bien dans le cadre de l'approximation.

3. a) On peut calculer β_s à l'aide du schéma suivant :



On trouve facilement que $\tan \frac{\beta_S}{2} = \frac{R_S}{d_{TS}}$, d'où :

$$\beta_S = 2 \arctan \left(\frac{R_S}{d_{TS}} \right) = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 32,1'.$$

b) La réfraction n'agissant que dans les plans verticaux, on en déduit que $\beta_h = \beta_S$, et on a $\Psi_r = \theta_1 - \theta_0 = 32,9 - (90 \times 60 - \theta_0) \times 0,177$ ce qui donne :

$$\theta_1 = 1,177 \times \theta_0 + cte.$$

Or θ_1 varie entre $-\beta_S/2$ et $\beta_S/2$ ce qui entraîne une variation de θ_0 donnée par :

$$\Delta \theta_0 = \beta_v = \frac{\Delta \theta_1}{1,177} = \frac{\beta_S}{1,177} = 27,3'.$$

Finalement on obtient :

$$\epsilon_S = \frac{\beta_v}{\beta_h} = 0,85.$$

Solution de l'exercice 5

1. On écrit l'équation de maille du circuit :

$$E = RI + rI + e.$$

On obtient alors :

$$I = \frac{E - e}{R + r}.$$

La tension U est donnée par :

$$U = e + rI = e + \frac{r}{R + r}(E - e).$$

On travaille en convention récepteur.

2. On a dans l'ordre :

$$P_g = EI = \frac{E(E - e)}{R + r}$$

$$P_J = (R + r)I^2 = \frac{(E - e)^2}{(R + r)}$$

$$P_b = eI = \frac{e(E - e)}{R + r}.$$

3. Le rendement est alors donné par :

$$\rho = \frac{P_g}{P_b} = \frac{E}{e}.$$

4. a) La capacité de la batterie est homogène à une charge en Coulomb.
b) On doit avoir :

$$I \cdot t_c = \frac{90}{100} 50.$$

D'où :

$$t_c = \frac{90 \times 50}{100} \cdot \frac{0,3 + 0,2}{13 - 12} = 22,5 \text{ h.}$$

- c) L'énergie dissipée par effet Joule durant cette charge vaut :

$$E_J = P_J \cdot t_c = \frac{(E - e)^2}{R + r} t_c = 162 \text{ kJ.}$$

Solution de l'exercice 6

1. On a :

$$\begin{cases} v_s &= Ri_R \\ v_s &= u_C = \frac{q}{C} \\ i_C &= \frac{dq}{dt} \\ E &= r(i_R + i_C) + L \frac{d}{dt}(i_R + i_C) + v_s \end{cases}$$

La première équation donne i_R :

$$i_R = \frac{v_s}{R}.$$

On dérive la deuxième équation pour faire apparaître i_C :

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{1}{C}i_C \Leftrightarrow i_C = C\frac{dv_s}{dt}.$$

On remplace dans la quatrième équation :

$$E = r \left(\frac{v_s}{R} + C\frac{dv_s}{dt} \right) + \frac{L}{R} \frac{dv_s}{dt} + LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + v_s.$$

Ce qui, après quelques arrangements donne :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dv_s}{dt} + \frac{r+R}{RLC}v_s = \frac{E}{LC}.$$

2. On écrit l'équation différentielle sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \text{cte.}$$

En identifiant, on obtient :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{r+R}{RLC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{R+r}{RLC}} \\ Q = \frac{\sqrt{(R+r)RLC}}{L+rRC} \end{cases}$$

3. Applications numériques :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ Q &= 1,84 \end{aligned}$$

4. L'équation caractéristique s'écrit :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0.$$

Le discriminant étant négatif, on a deux racines complexes conjuguées :

$$x_{1-2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Le régime obtenu est un régime pseudo-périodique.

5. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le circuit est donc équivalent à celui de la figure ci dessous.

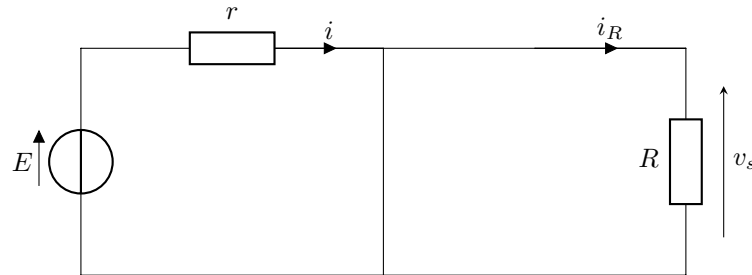


FIGURE 7 – Circuit équivalent en régime permanent

On voit que pour ce circuit, $v_s(\infty) = 0$ et $i_C(\infty) = E/r$. Comme v_s est la tension aux bornes d'un condensateur et i le courant qui traverse une bobine, on sait que ces deux grandeurs vont varier de manière continue à l'ouverture de l'interrupteur.

On a $v_s(0) = 0 = Ri_R(0)$ donc $i_R(0) = 0$.

Or d'après la loi des nœuds

$$i_C(0) = i(0) - i_R(0) = E/r.$$

Donc

$$\frac{dv_s}{dt}(0) = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}(0) = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{E}{rC}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} v_s(0) &= 0 \\ \frac{dv_s}{dt}(0) &= \frac{E}{rC} \end{aligned}$$

6. On pose $\omega = \sqrt{-\Delta}/2$, et la solution s'écrit :

$$v_s = -B \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{LC\omega_0^2}.$$

La valeur de A est la solution particulière de l'équation avec second membre.

Pour trouver B et φ , il faut utiliser les conditions initiales :

$$\begin{cases} v_s(0) = 0 = -B \cos \varphi + \frac{E}{LC\omega_0^2} \\ \frac{dv_s}{dt}(0) = \frac{E}{rC} = B\omega \sin \varphi + \frac{B\omega_0}{2Q} \cos \varphi \end{cases}$$

7. La représentation de v_s est donnée sur la figure ci-dessous.

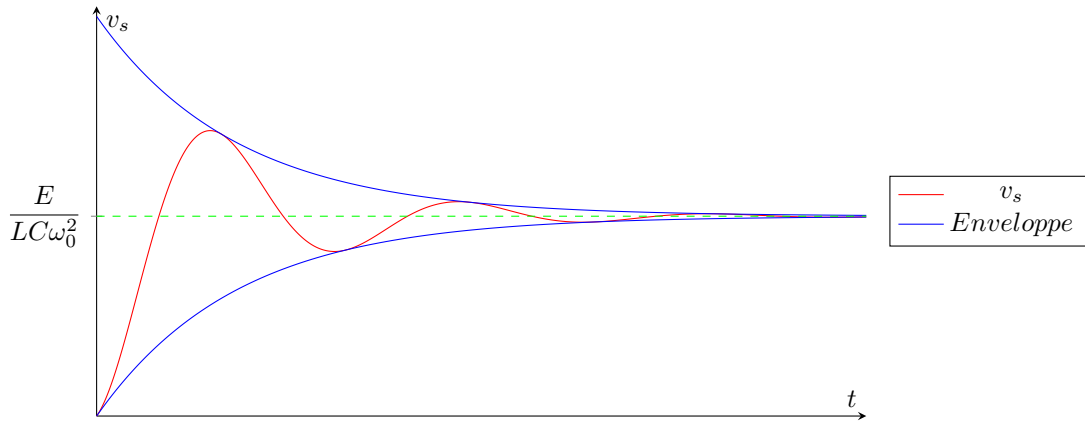


FIGURE 8 – Tracé de $v_s(t)$.

Solution de l'exercice 7

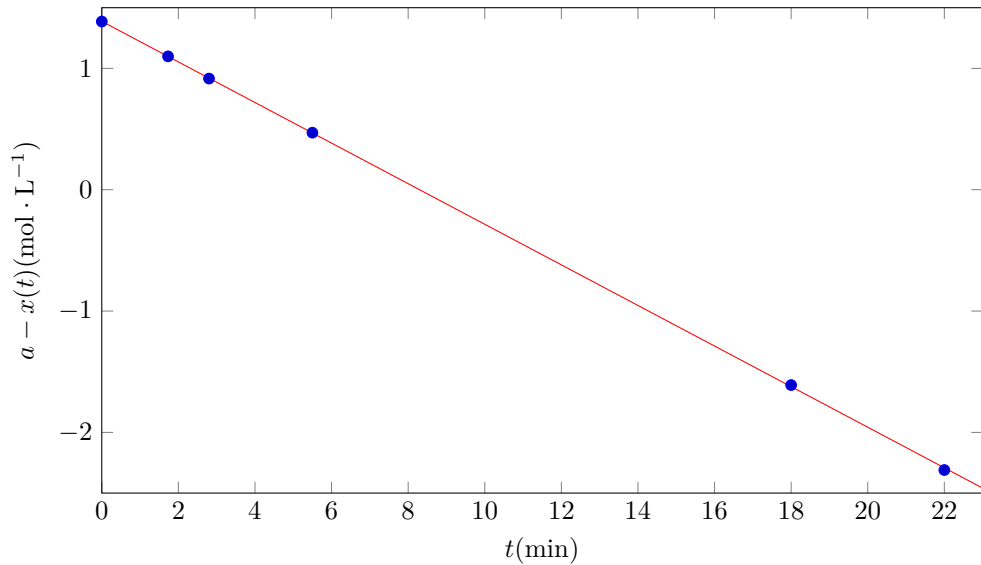
1. a) Par définition $v = -\frac{d[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]}{dt} = -\frac{d(a-x)}{dt} = \frac{dx}{dt}$.
- b) Clairement la réaction n'est pas d'ordre 0 (l'évolution n'est pas linéaire), en revanche le temps de demi-réaction semble constant. On suppose donc que l'ordre est égal à 1 d'où :

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + k_1x = k_1a.$$

La solution de cette équation différentielle est :

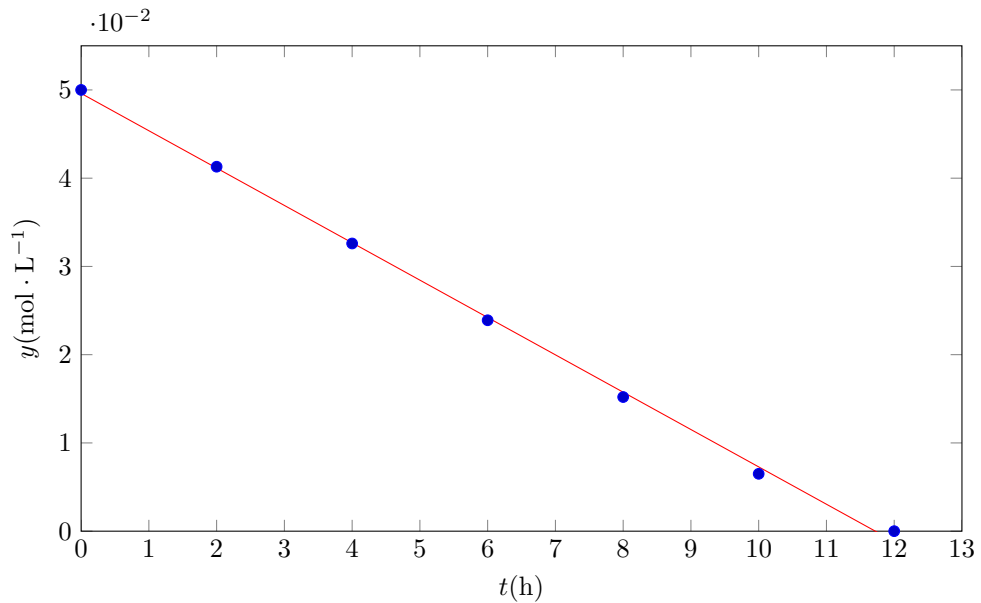
$$x(t) = a(1 - \exp(-k_1t)) \Leftrightarrow a - x(t) = a \exp(-k_1t).$$

Il suffit alors de tracer $\ln(a-x) = -k_1t + \ln(a)$ en fonction du temps :



On obtient une droite (ce qui valide l'hypothèse ordre = 1) dont la pente est égale à $-k_1$. Une régression linéaire permet d'obtenir $k_1 = 0,167 \text{ min}^{-1}$.

- c) Il suffit de calculer $a - x(t_1)$ avec $t_1 = 18 \text{ min}$: $a - x(t_1) = a \exp(-kt_1)$ avec a qui est déterminé grâce à la valeur de $a - x(0)$. Application numérique : $a - x(t_1) \approx 0,197 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- d) Le nombre de moles qui quittent l'estomac est égal au nombre de moles qui entrent dans le sang, seul la différence de volume fait varier la concentration donc $V_1 \frac{dx}{dt} = V_2 r_1$.
2. a) La vitesse d'oxydation s'écrit $r_2 = -\frac{dy}{dt}$.
- b) La loi semble linéaire ce qui laisse présager un ordre nul. On suppose que l'ordre est égal à 0 $-\frac{dy}{dt} = k_2$ d'où $y = -k_2 t + y(0)$. Pour vérifier cela, on trace y en fonction du temps.

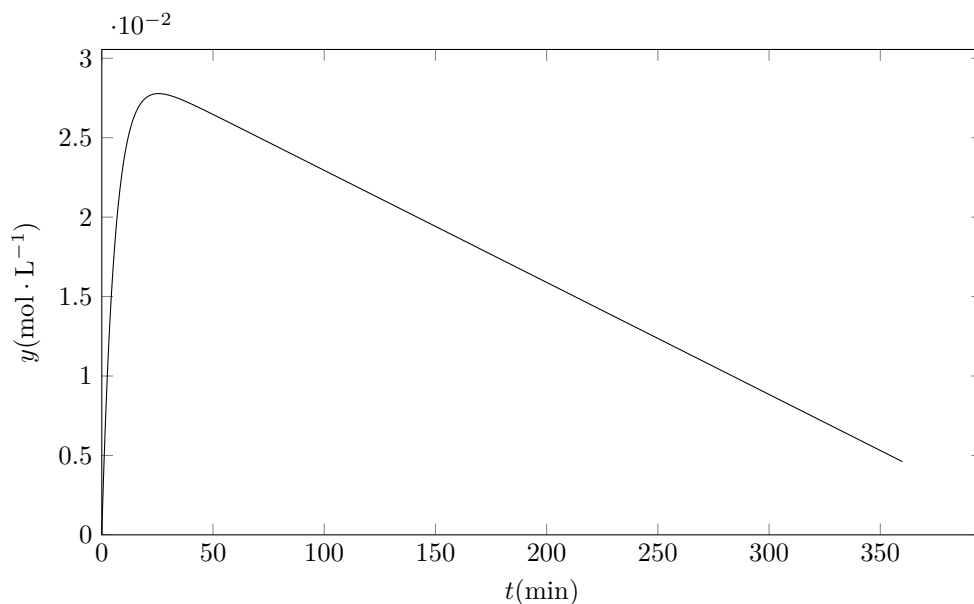


On obtient bien une droite, ce qui valide l'hypothèse ordre = 0. La pente de cette droite, obtenue par régression linéaire, donne la valeur de $k_2 = 4,23 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$.

3. a) D'après les questions précédentes : $r = r_1 - r_2 = \frac{V_1}{V_2} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{V_1}{V_2} k_1 (a - x) - k_2 = \frac{V_1}{V_2} k_1 a \exp(-k_1 t) - k_2$. L'intégration de ce résultat donne $y(t) = -\frac{V_1}{V_2} a \exp(-k_1 t) - k_2 t + y_0$. Les conditions initiales permettent de déterminer $y_0 = \frac{V_1}{V_2} a$ d'où $y(t) = \frac{V_1}{V_2} a (1 - \exp(-k_1 t)) - k_2 t$.
- b) La concentration est maximale si $r = 0$ c'est-à-dire si $\frac{V_1}{V_2} k_1 a \exp(-k_1 t) - k_2 = 0$ donc si :

$$t = \frac{1}{k_1} \ln \left(\frac{k_1 V_1 a}{k_2 V_2} \right) \approx 25 \text{ min } 30 \text{ s.}$$

La courbe $y(t)$ est ci-dessous :



Cette courbe permet de voir qu'il faut attendre environ 4h00 à 4h30 avant que le conducteur puisse reprendre le volant (la quantité d'alcool ingéré correspond à 6 verres de whisky environ).

- c) L'hypothèse semble raisonnable sauf que les équations ne sont valables que tant que $u(t) \geq 0$.

Solution de l'exercice 8

1. $1s^2 2s^2 sp^6 3s^2$ le magnésium est donc dans la troisième ligne et dans la deuxième colonne du bloc s.
2. a) Quand le rayon atomique augmente, les électrons périphériques sont situés plus loin du noyau et sont donc plus faciles à « arracher ». Ainsi quand le rayon atomique augmente, l'énergie d'ionisation diminue (il faut moins d'énergie pour arracher un électron).
 b) Le second électron est toujours plus proche du noyau que le premier, il est donc toujours plus difficile à arracher.
 c) Le moins électronégatif est le baryum (le plus bas dans dans la colonne), c'est aussi le plus réducteur (\Leftrightarrow le moins électronégatif).

Solution de l'exercice 10

1. On applique tout simplement le principe fondamental de la dynamique à M_1 :

$$\vec{F}_v + m\vec{g} - k(x + \ell_{eq} - \ell_0)\vec{e}_x = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow -f\dot{x} + mg - k\ell_{eq} + k\ell_0 - kx = m\ddot{x}$$

On obtient l'équation classique :

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

2. D'après le graphique, on se trouve en régime pseudo-périodique, donc la discriminant de l'équation caractéristique est négatif :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

On a donc

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2).$$

Comme $\Delta < 0$, on en déduit $\lambda < \omega_0$.

Les deux solutions s'écrivent :

$$r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

On pose $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et la solution s'écrit :

$$x(t) = \exp(-\lambda t) [A \cos \omega t + B \sin \omega t].$$

On déduit du graphique :

$$\begin{cases} 4T = 2,5\text{s} \\ \exp(-2\lambda \cdot T) \approx 1.4/5 \end{cases}$$

On en déduit $T = 0,625\text{s}$ et $\omega = 2\pi/T \approx 10,0\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda = 1,02\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2} = 10,1\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Finalement :

$$f = 2m\lambda = 0,204\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } k = m\omega_0^2 = 10,2\text{N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3. Ce qui change par rapport aux questions précédentes c'est juste l'expression de l'accélération :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} = (\ddot{s} + \ddot{x}) \vec{e}_x.$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{dx}{dt}(t) + 2\lambda \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

4. On utilise la notation complexe et on obtient :

$$-\omega_1^2 \underline{x} + 2i\omega_1 \lambda \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = -\omega_1^2 \underline{s}.$$

On trouve alors :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{x}}{\underline{s}} = -\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2i\omega_1 \lambda}.$$

5. On calcule le module de la transmittance :

$$Y = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\omega_1^2 \lambda^2}}.$$

On obtient facilement les valeurs limites :

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} Y = 0 \text{ et } \lim_{\omega_1 \rightarrow +\infty} Y = 1.$$

6. On réécrit Y :

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - 1)^2 + 4 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 z^2}}$$

Y est maximal si

$$D(z) = (z^2 - 1)^2 + 4 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 z^2,$$

est minimal donc si :

$$\begin{aligned} \frac{dD(z)}{dz} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4z(z^2 - 1) + 8z \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 - 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt{1 - 2 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

Cette solution n'existe que si

$$1 - 2 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 > 0,$$

donc si

$$\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

7. Le tracé des courbes est sur la figure ci-dessous.

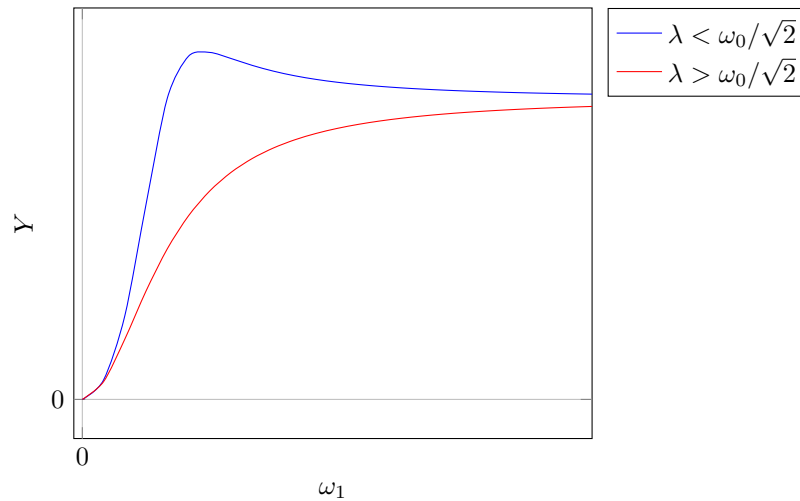


FIGURE 13 – Tracé de Y pour deux valeurs de λ

8. On cherche ω_c tel que $Y(\omega_c) = Y_{max}/\sqrt{2}$, on est dans le cas où Y ne possède pas de maximum relatif, donc $Y_{max} = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(z^2 - 1)^2 + 4 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 z^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow (z^2 - 1)^2 + 4 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 z^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow z^4 + z^2 \left(4 \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 - 2\right) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On pose $Z = z^2$:

$$Z^2 + Z(4u - 2) - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (4u - 2)^2 + 4 > 0.$$

On ne garde que l'unique solution positive :

$$Z_c = \frac{(2 - 4u) + \sqrt{\Delta}}{2} = 1 - 2u + \sqrt{1 + (2u - 1)^2}.$$

Finalement :

$$z_c = \sqrt{1 - 2u + \sqrt{1 + (2u - 1)^2}}.$$

9. Si on veut que ω_c ait une valeur minimale, il faut que z_c soit maximal, or $z_c(u)$ est une fonction monotone décroissante, il faut donc que u soit minimal. C'est à dire :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

En fixant cette contrainte, on s'assure que Y s'approche de sa valeur maximale ($Y = 1 \Leftrightarrow x(t) = \pm s(t)$) pour toutes les valeurs de $\omega_1 > \omega_c$. D'où l'intérêt de choisir ω_c la plus faible possible.

Solution de l'exercice 11

Partie I — Étude de l'arc de cercle AB

1. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point A et le point M repéré par l'angle θ :

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 = mg(z_A - z_M).$$

La réaction du support ne travaille pas car elle est normale au déplacement. De plus $z_1 - z_M = r_1 - r_1 \cos(\theta)$ d'où :

$$v(\theta) = \sqrt{2gr_1(1 - \cos(\theta))}.$$

2. On applique le PFD au point M dans le référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg \cos(\theta) \vec{u}_r + mg \sin(\theta) \vec{u}_\theta \\ \vec{N} &= N \vec{u}_r\end{aligned}$$

De plus $a = -r_1 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r_1 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$. En projetant le PFD selon \vec{u}_r on obtient :

$$-mr_1 \dot{\theta}^2 = -mg \cos(\theta) + N.$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}N &= mg \cos(\theta) - mr_1 \dot{\theta}^2 \\ &= mg \cos(\theta) - mr_1 \left(\frac{v(\theta)}{r_1} \right)^2 \\ &= mg \cos(\theta) - m \frac{v(\theta)^2}{r_1} \\ &= mg \cos(\theta) - m \frac{2gr_1(1 - \cos(\theta))}{r_1} \\ &= 3mg \cos(\theta) - 2mg\end{aligned}$$

3. On cherche θ_{dec} tel que $N = 0$:

$$\cos(\theta_{dec}) = \frac{2}{3} \text{ d'où } \theta_{dec} \approx 48^\circ.$$

Partie II — Étude de la partie BCD

1. On utilise encore le théorème de l'énergie cinétique entre le point A et le point D :

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = mg(z_A - z_D).$$

Et

$$z_A - z_D = z_A - z_B + z_B - z_C + z_C - z_D = 2r_1(1 - \cos(\alpha_1)) + L \sin(\alpha_1).$$

D'où

$$v_D = \sqrt{4gr_1(1 - \cos(\alpha_1)) + 2gL \sin(\alpha_1)}.$$

Partie III — Étude du looping DEF

1. On a par définition :

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= - \int (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) \cdot (r_2 d\theta \vec{u}_\theta) \\ &= \int mgr_2 \sin \theta d\theta \\ &= [-mgr_2 \cos \theta]\end{aligned}$$

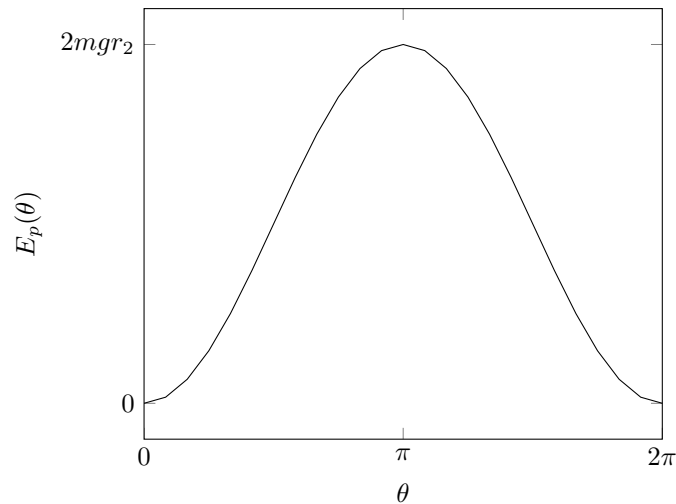
D'où :

$$E_p = -mgr_2 \cos \theta + cte.$$

On prend $E_p(0) = 0$ donc $cte = mgr_2$ et

$$E_p = mgr_2(1 - \cos \theta).$$

2. On trace la courbe :



3. D'un point de vue purement énergétique, il suffit d'avoir un mouvement de diffusion donc que $E_m > E_{p_{max}} = 2mgr_2$ c'est à dire :

$$v_{D1} = 2\sqrt{gr_2}.$$

4. Avec le même genre de raisonnement que précédemment entre les point D et M , on trouve facilement :

$$v(\theta) = \sqrt{v_D^2 + 2gr_2(\cos \theta - 1)}.$$

5. Même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$N = m \frac{v_D^2}{r_2} + 3mg \cos \theta - 2mg.$$

6. N est minimale si $\cos \theta = -1$ donc

$$N_{min} = m \frac{v_D^2}{r_2} - 5mg.$$

7. Pour v_{D1} on trouve :

$$N = -mg.$$

Ainsi N a du s'annuler avant, le chariot a décollé.

8. Il faut que N ne s'annule jamais donc que

$$v_D \geq \sqrt{5gr_2} = v_{D2}.$$

9. Applications numériques : $v_D = 12,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_{D2} = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Partie IV — Étude du segment FG

1. Par application du théorème de l'énergie cinétique on trouve immédiatement $V_F = v_D$.
2. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point F et le point d'arrêt de M :

$$-\frac{1}{2}mv_F^2 = -fmgd.$$

Il n'y a que les frottements qui travaillent et comme il n'y a pas de mouvements selon l'axe vertical on en déduit que $N = mg$. On trouve :

$$d = \frac{v_F^2}{2fg} \approx 2,5 \text{ m}.$$

Solution de l'exercice 12

1. On utilise la définition de E_p :

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \int \frac{mg_0}{r_T} (h\vec{u}_y + x\vec{u}_x) \cdot (dx\vec{u}_x) \\ &= \frac{mg_0}{r_T} \int x dx \\ &= \left[\frac{mg_0}{2r_T} x^2 \right] \end{aligned}$$

On trouve donc $E_p = \frac{mg_0}{2r_T} x^2 + cte$.

2. La vitesse est maximale si l'énergie potentielle est minimale (le mouvement est conservatif). C'est donc en $x = 0$ que la vitesse est maximale.
3. On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 = 0 + \frac{mg_0}{2r_T}(r_T^2 - h^2).$$

D'où

$$v_{max} = \sqrt{\frac{g_0(r_T^2 - h^2)}{r_T}}.$$

Pour $h = r_T/2$:

$$v_{max} = 6860 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4. Pour cela on dérive simplement l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg_0}{r_T}\dot{x}x = 0.$$

On trouve alors :

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{r_T}x = 0.$$

5. C'est un oscillateur harmonique donc :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Avec $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{r_T}}$ et les conditions initiales, on trouve :

$$x(t) = \sqrt{r_T^2 - h^2} \cos(\omega t).$$

6. Entre A et B la durée du trajet est d'une demi-période :

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{r_T}{g_0}} \approx 42 \text{ min.}$$

Solution de l'exercice 13

1. a) On utilise la formule du diviseur de tension :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}.$$

b) Comme indiqué question précédente c'est un montage diviseur de tension.

2. a) Pour ne récupérer que les signaux informatiques qui sont haute-fréquence, on va utiliser un filtre passe-haut.

b) Pour les signaux téléphoniques, on ne gardera que les basses-fréquences donc on utilisera un filtre passe-bas.

c) Dans le cas du filtre passe-haut on prendra une fréquence de coupure de l'ordre de 25 kHz et pour le passe-bas, une fréquence de coupure de l'ordre de 5 kHz.

3. a) À basse fréquence la bobine est équivalente à un fil et on obtient $u_s = 0$ (tension aux bornes d'un fil. À haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et dans ce cas la tension aux bornes des deux résistances est nulle car aucun courant ne circule et on retrouve $u_s = u_e$.

b) On trouve en utilisant la formule du diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{Z}_L}{R + \underline{Z}_L} \underline{u}'.$$

Pour obtenir \underline{u}' , on utilise encore une fois un diviseur de tension mais en prenant l'impédance équivalente aux bornes de u' :

$$\underline{u}' = \frac{\frac{1}{R} \underline{u}_e}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R + \underline{Z}_L}}.$$

c) On trouve alors :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{\underline{Z}_L}{R + \underline{Z}_L} \cdot \frac{\frac{1}{R} u_e}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R + \underline{Z}_L}} \\ &= \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{jLR\omega}{R + jL\omega}} \\ &= -\frac{L^2\omega^2}{(R + jL\omega)^2 + jLR\omega} \\ &= -\frac{L^2\omega^2}{R^2 - L^2\omega^2 + 3jLR\omega} \end{aligned}$$

On trouve alors $A = -L^2\omega^2$, $B = R^2 - L^2\omega^2$ et $C = 3LR\omega$.
Si on pose $\omega_0 = \frac{R}{L}$, on trouve :

$$\underline{H} = -\frac{x^2}{1 - x^2 + 3jx}$$

d) On a $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et :

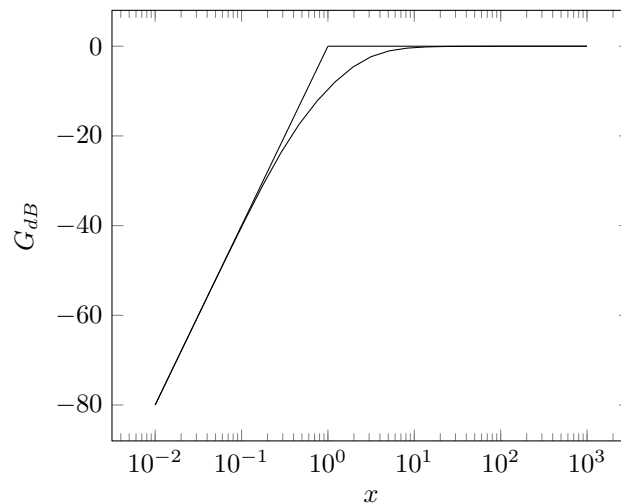
$$|\underline{H}| = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{x^4} + \frac{9}{x^2}}}$$

$|\underline{H}|$ est maximum si $x \rightarrow \infty$ donc $|\underline{H}|_{max} = 1$.

e) Pas de difficultés particulières :

Valeur de x	$x \rightarrow 0$	$x = 1$	$x \rightarrow \infty$
G_{dB} (décibels)	$40 \log x$	$-20 \log 3$	0

f) On trace le diagramme asymptotique et l'allure de la courbe réelle :



g) On sait que $x_c = 2,67$ d'où $\omega_0 = \omega_c/2,67 \approx 35\,300$ rad/s. De plus $\omega_0 = R/L$ d'où $R = L\omega_0 \approx 49,4\Omega$.

Solution de l'exercice 14

1. On commence par donner l'expression de \vec{E} dans $Oxyz$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -2\alpha(r\vec{e}_r - 2z\vec{e}_z) \\ \vec{E} &= -2\alpha(r(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) - 2z\vec{e}_z) \\ \vec{E} &= -2\alpha(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z).\end{aligned}$$

On applique le PFD à l'électron placé dans le champ électrique :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = 2\alpha e \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en projetant sur les 3 axes :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2\alpha e}{m}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{2\alpha e}{m}y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{4\alpha e}{m}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_0^2}{2}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{\omega_0^2}{2}y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2z = 0 \end{cases}$$

2. Selon Oz on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique. Le mouvement est donc périodique de pulsation ω_0 .
3. A.N. : $\omega_0 = 6,4 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. On obtient pour x et y :

$$\begin{cases} x = A_1 \exp\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) + A_2 \exp\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) \\ y = B_1 \exp\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) + B_2 \exp\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) \end{cases}$$

On se rend compte que x et y tendent vers l'infini quand le temps tend vers l'infini. On en déduit que le mouvement n'est pas borné.

5. On applique de nouveau le PFD en ajoutant la force $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$:

$$\begin{aligned}m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= 2\alpha e \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \\ m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\alpha ex - eB\dot{y} \\ 2\alpha ey + eB\dot{x} \\ -4\alpha ez \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui donne les équations différentielle suivantes (en projetant sur Ox et Oy uniquement) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_0^2}{2}x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{\omega_0^2}{2}y + \omega_c\dot{x} \end{cases}$$

6. L'équation selon Oz est inchangée donc le mouvement de l'électron selon cet axe reste borné.

7. On calcule $\ddot{\xi} = \ddot{x} + i\ddot{y}$:

$$\ddot{\xi} = \frac{\omega_0^2}{2}\xi + i\omega_c\dot{\xi}.$$

8. A.N : $\omega_c = 175 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} > \sqrt{2}\omega_0$

9. On écrit l'équation caractéristique liée à l'équation différentielle :

$$r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_0^2}{2} = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2 < 0$$

Les deux solutions s'écrivent donc :

$$\begin{cases} r_1 = i\omega_1 = i \left(\frac{\omega_c}{2} - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2} \right) \\ r_2 = i\omega_2 = i \left(\frac{\omega_c}{2} + \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2} \right) \end{cases}$$

On a donc :

$$\xi(t) = A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t).$$

10. A.N. : $\omega_1 = 1,2 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2 = 176 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

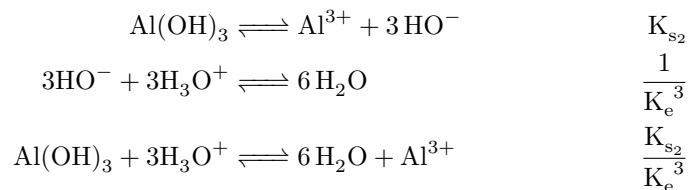
11. On trouve :

$$\begin{cases} x(t) = \Re(\xi) = \Re(A_1) \cos(\omega_1 t) - \Im(A_1) \sin(\omega_1 t) \\ y(t) = \Im(\xi) = \Im(A_1) \cos(\omega_1 t) + \Re(A_1) \sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

On trouve que $x^2 + y^2 = (\Re(A_1))^2 + (\Im(A_1))^2 = |A_1|^2$. La trajectoire est circulaire de rayon $|A_1|$ et de pulsation ω_1 .

Solution de l'exercice 15

1. Il y a deux manières de procéder. Pour la première réaction on fait un bilan des réaction de constantes connues qui amène à la réaction écrite :



On en déduit :

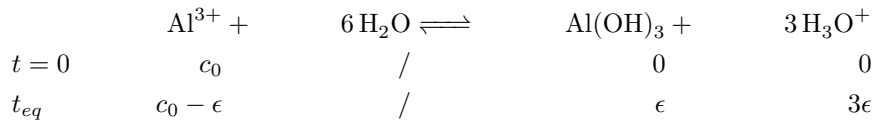
$$K_1 = \frac{K_{s_2}}{K_e^3} = \frac{1 \times 10^{-32,5}}{1 \times 10^{-42}} = 1 \times 10^{9,5} \approx 3,2 \times 10^9.$$

Pour la seconde réaction on écrit l'expression de sa constante et on cherche à l'exprimer

en fonction de constantes données dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{[\text{Al}(\text{OH})_4^-]}{[\text{HO}^-]} \\
 &= \frac{[\text{Al}(\text{OH})_4^-]}{[\text{Al}^{3+}][\text{HO}^-]^4} \times [\text{Al}^{3+}][\text{HO}^-]^3 \\
 &= \beta \cdot K_{s_2} \\
 &= 1 \times 10^{33,4} \times 1 \times 10^{-32,5} \\
 &= 1 \times 10^{0,9} \approx 7,9
 \end{aligned}$$

2. On détermine la concentration en ions H_3O^+ à l'équilibre lorsque le premier cristal de $\text{Al}(\text{OH})_3$ apparaît :



Avec $\epsilon \ll c_0$:

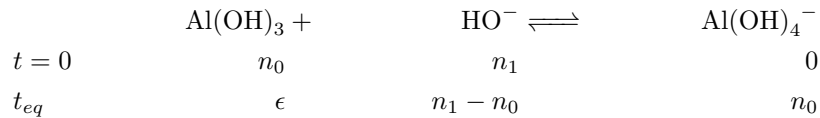
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K_1} &= \frac{([\text{H}_3\text{O}^+])^3}{c_0} \\
 [\text{H}_3\text{O}^+]^3 &= \frac{c_0}{K_1} \\
 [\text{H}_3\text{O}^+] &= \left(\frac{c_0}{K_1} \right)^{1/3}
 \end{aligned}$$

Application numérique $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx 1,5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. On en déduit $pH_1 = 3,8$.
Calculons la concentration en $[\text{Al}(\text{OH})_4^-]$ à ce pH :

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{[\text{Al}(\text{OH})_4^-]}{[\text{HO}^-]} \\
 [\text{Al}(\text{OH})_4^-] &= K_2[\text{HO}^-] \\
 [\text{Al}(\text{OH})_4^-] &= \frac{K_2 K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]}
 \end{aligned}$$

Application numérique : $[\text{Al}(\text{OH})_4^-] = 5,4 \times 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Ils sont bien négligeables.

3. À la fin de la redissolution, tous les ions aluminium se retrouvent sous la forme $\text{Al}(\text{OH})_4^-$:



On a donc :

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{c_0}{[\text{HO}^-]} \\
 [\text{HO}^-] &= \frac{c_0}{K_2} \\
 [\text{H}_3\text{O}^+] &= \frac{K_e K_2}{c_0}
 \end{aligned}$$

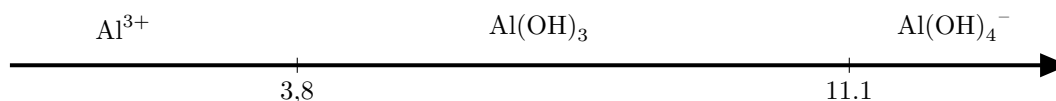
Application numérique : $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx 7,9 \times 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ d'où $\text{pH}_2 = 11,1$.
 À ce pH, on a :

$$K_1 = \frac{[\text{Al}^{3+}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]^3}$$

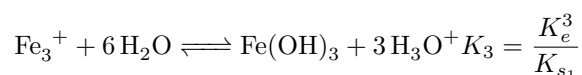
$$[\text{Al}^{3+}] = K_1[\text{H}_3\text{O}^+]^3$$

Application numérique : $[\text{Al}^{3+}] = 1,6 \times 10^{-24} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ce qui est négligeable.

4. On trace le diagramme de prédominance :



5. Toujours la même méthode :

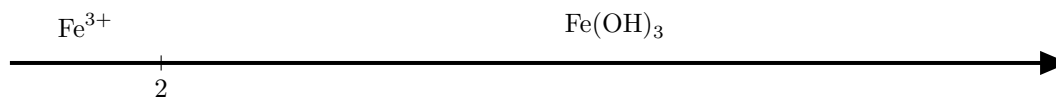


C'est exactement la même équation que précédemment, on en déduit donc facilement la concentration en H_3O^+ lors de l'apparition du précipité :

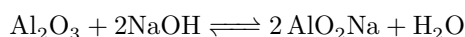
$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \left(\frac{c_0}{K_3} \right)^{1/3} = \approx 1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}.$$

Ce qui donne un $\text{pH} = 2$.

6. On en déduit le diagramme de prédominance du Fe(III) :



7. a) Il suffit d'équilibrer la réaction :



b) L'objectif étant de séparer l'aluminium du fer, il faut dissoudre l'aluminium en gardant le fer sous forme solide. C'est ce qui se passe à pH élevé.

c) La dilution entraîne une diminution du pH et on entre alors dans le domaine de prédominance de l'hydroxyde.

Solution de l'exercice 16

$$1. c_0 = \frac{n(\text{MnCl}_2)}{V} = \frac{m(\text{MnCl}_2)}{M(\text{MnCl}_2)V} \approx 4,4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

2. On a précipitation de $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$ ssi la réaction $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 2\text{HO}^-$ se déroule dans le sens indirect ssi

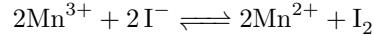
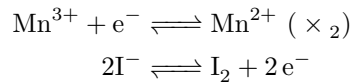
$$\begin{aligned} Q_0 &= [\text{Mn}^{2+}]_0 [\text{HO}^-]_0^2 > K_s \\ \Leftrightarrow [\text{HO}^-]_0 &> \sqrt{\frac{K_s}{c_0}} \\ \Leftrightarrow \frac{K_e}{[\text{H}^+]} &= K_e 10^{pH} > \sqrt{\frac{K_s}{c_0}} \\ \Leftrightarrow 10^{pH} &> \frac{1}{K_e} \sqrt{\frac{K_s}{c_0}} \\ \Leftrightarrow pH &> \log\left(\frac{1}{K_e} \sqrt{\frac{K_s}{c_0}}\right) \approx 8,3 \end{aligned}$$

3. $[\text{HO}^-]_0 = \frac{n(\text{NaOH})}{V} = \frac{m(\text{NaOH})}{M(\text{NaOH})V} = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'où le pH initial de la solution :

$$pH = -\log([\text{H}^+]_0) = 13.$$

$pH > 8,3$ donc il y a précipitation de $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$.

4. $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$ doit être en excès pour que tout le $\text{O}_{2\text{aq}}$ dissous dans l'eau réagisse et puisse donc être dosé dans la suite de la manipulation.
5.



La formule de Nernst donne :

- pour le couple $\text{Mn}^{3+}/\text{Mn}^{2+}$

$$E_1 = E_1^o + 0,06 \log\left(\frac{[\text{Mn}^{3+}]}{[\text{Mn}^{2+}]}\right).$$

- pour le couple I_2/I^-

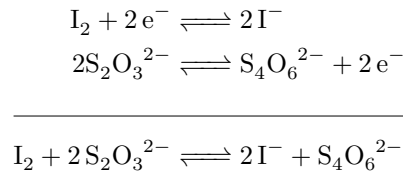
$$E_2 = E_2^o + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2}\right)$$

La loi de l'équilibre $E_1 = E_2$ donne :

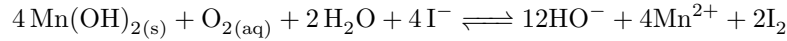
$$K = 10^{2 \frac{E_1^o - E_2^o}{0,06}} = 2,15 \times 10^9.$$

La réaction est quasi-totale car $K \gg 1$.

- 6.



7. On trouve l'équation bilan en sommant les réactions :



Cette équation étant quantitative et $\text{O}_{2(\text{aq})}$ étant le réactif limitant, on a : $[\text{I}_2]_f = 2[\text{O}_{2(\text{aq})}]$. De plus, à l'équivalence de la réaction de dosage, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques donc :

$$n(\text{I}_2) = \frac{n(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})}{2};$$

donc $[\text{I}_2]_f V_0 = \frac{c_1 V_{eq}}{2}$. D'où on tire :

$$[\text{O}_{2(\text{aq})}] = \frac{c_1 V_{eq}}{4V_0} = 5,5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

8. Le titre massique du dioxygène dissous dans l'eau vaut : $t = [\text{O}_{2(\text{aq})}] \times M(\text{O}_2) = 17,6 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, il s'agit donc d'une eau de type 1A « d'excellente qualité ».

Solution de l'exercice 17

1. a) La loi des gaz parfaits donne : $n_1 = \frac{P_0 V_1}{RT_0} \approx 0,40 \text{ mol}$.
- b) À l'état final, l'équilibre mécanique entre le compartiment C_1 et le réservoir *Res* impose $P_1 = P_r$.
- c) La loi des gaz parfaits à l'état final dans le compartiment C_1 donne : $P_R V_1 = (n_1 + n)RT_1$. D'où on tire :

$$n = \frac{P_R V_1}{RT_1} - n_1 = \frac{P_R V_1}{RT_1} - \frac{P_0 V_1}{RT_0}.$$

d) On sait que $P_{ext} = P_R = cte$ donc :

$$\begin{aligned} W &= - \int_{EI}^{EF} P_{ext} dV \\ &= -P_R \int_{EI}^{EF} dV \\ &= P_R (V(EI) - V(EF)) \end{aligned}$$

Or $V(EF) = V_1$ et $V(EI) = V_1 + V_n$ donc $W = P_R V_n$.

e) Le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = W + Q = W = P_R V_n;$$

car $Q = 0$ (transformation adiabatique). Or

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U(n_1) + \Delta U(n) \\ &= \frac{n_1 R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) + \frac{n R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) \\ &= \frac{(n_1 + n) R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) \\ &= \frac{P_R V_1}{T_1 (\gamma - 1)} (T_1 - T_0) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{P_R V_1}{T_1(\gamma - 1)}(T_1 - T_0) = P_R V_n.$$

On utilise alors l'équation d'état du gaz parfait à l'instant initial :

$$P_R V_n = nRT_0 = \frac{P_R V_1 T_0}{T_1} - P_0 V_1$$

On en déduit :

$$T_1 = \frac{\gamma P_R}{P_R + (\gamma - 1)P_0} T_0 \approx 413,4 \text{ K.}$$

2. a) C'est une détente de Joule-Gay Lussac.
 b) Système = $\{n + n_1 \text{ moles de gaz}\}$. Le travail est nul car $P_{est} = 0$ (détente dans le vide). Les parois sont calorifugées donc $Q = 0$. On en déduit $\Delta U = 0$. Or $\Delta U = \frac{(n + n_1)R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$ donc $T_2 = T_1$.
 c) On utilise la formule qui donne l'entropie du gaz parfait (que j'ai oublié de rappeler dans l'énoncé) :

$$\Delta S = \frac{P_R V_1}{T_1} \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right).$$

Or $\Delta S = \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c$ et ici $\mathcal{S}_e = 0$ car les parois sont calorifugées donc :

$$\mathcal{S}_c = \Delta S = \frac{P_R V_1}{T_1} \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) \approx 11 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0.$$

L'évolution est irréversible.

3. a) La loi des gaz parfaits à l'état initial donne :

$$n_2 = \frac{P_2 V_2}{RT_0} = \frac{P_R V_0}{RT_0}.$$

- b) Système = $\{n_2 \text{ moles du gaz parfait}\}$. L'équation d'état du gaz parfait à l'état final donne :

$$V_{2f} = \frac{n_2 RT}{P_{2f}} = \frac{P_R V_0 T}{T_0 P_{2f}}.$$

Or l'équilibre mécanique du piston dans l'état final impose $P_{2f} = P_1 = P_R$ (vanne V_{a1} ouverte) donc :

$$V_{2f} = \frac{V_0 T}{V_0}.$$

- c) Le premier principe s'écrit $\Delta U = W + Q$ avec :

$$\Delta U = n_2 C_{v,m_2}(T - T_0) = 3n_2 R(T - T_0) = \frac{3P_R V_0}{T_0}(T - T_0).$$

De plus comme $P_{ext} = P_1 = P_R = cte$ on a $W = -P_R(V_{2f} - V_2) = xP_R V_0 - \frac{P_R V_0 T}{T_0}$.

Les parois sont calorifugées donc $Q = 0$, le premier principe s'écrit alors :

$$\frac{3P_R V_0}{T_0}(T - T_0) = xP_R V_0 - \frac{P_R V_0 T}{T_0}$$

On en déduit :

$$T(x) = \frac{3+x}{4}T_0.$$

d) De manière évidente :

$$V_{2f} = \frac{V_0 T}{T_0} = \frac{3+x}{4}V_0.$$

e) On utilise l'expression de l'entropie d'un gaz parfait :

$$\Delta S = \frac{3P_R V_0}{T_0} \ln\left(\frac{3+x}{4}\right) + \frac{P_R V_0}{T_0} \ln\left(\frac{3+x}{4x}\right) = \frac{P_R V_0}{T_0} \ln\left(\frac{(3+x)^4}{4^4 x}\right).$$

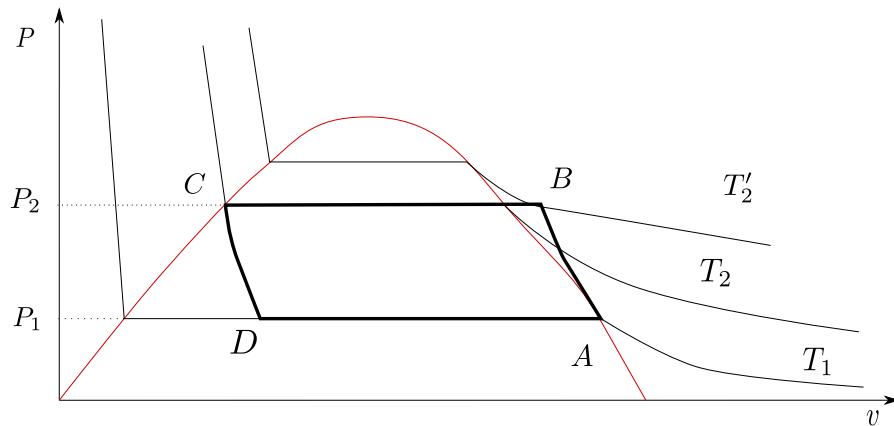
De plus $\mathcal{S}_c = \Delta S$ car $\mathcal{S}_e = 0$ (parois calorifugées) donc :

$$\mathcal{S}_c = \frac{P_R V_0}{T_0} \ln\left(\frac{(3+x)^4}{4^4 x}\right).$$

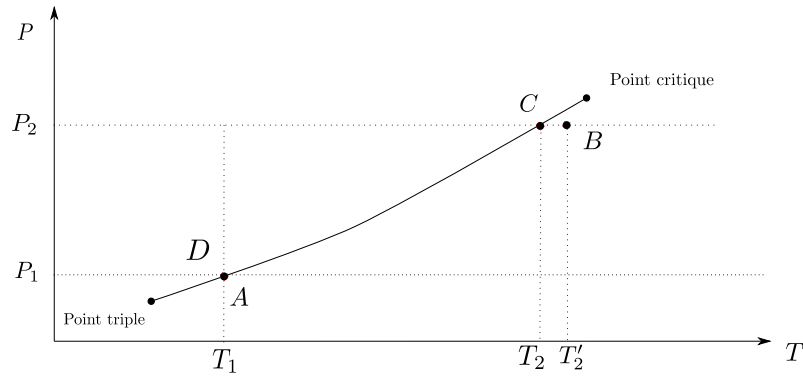
f) Application numérique $\mathcal{S}_c = 3,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Solution de l'exercice 18

1. a)



b)



2. a) La vapeur considérée comme un gaz parfait subit une compression adiabatique quasi-statique. On peut donc utiliser la loi de Laplace :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2'^\gamma \Leftrightarrow P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2'^\gamma \Leftrightarrow T_2' = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

- b) Pour un gaz parfait $\Delta H = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \Delta T$ donc $\Delta h = \frac{\gamma n R}{m(\gamma - 1)} \Delta T = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} \Delta T$. Ici $w = \Delta h$ d'où :

$$w = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)} (T_2' - T_1).$$

- c) Application numérique : $T_2' \approx 352 \text{ K}$ et $w \approx 46,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

3. a) Comme on se trouve à la pression P_2 et que le fluide évolue de façon isobare, la température T de la première goutte de fréon liquide est telle que $P^*(T) = P_2$ c'est à dire $T = T_2$ d'après le tableau donné dans l'énoncé.

- b) La vapeur passe d'abord de la température T_2' à T_2 ce qui entraîne une variation d'enthalpie massique $\Delta h_1 = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_2')$ puis le fluide subit ensuite un changement d'état total de vapeur à liquide et la variation d'enthalpie massique s'écrit $\Delta h_2 = -L_v(T_2)$. Finalement la variation d'enthalpie massique au cours de cette transformation s'écrit :

$$\Delta h_{BC} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_2') - L_v(T_2).$$

- c) Application numérique : $\Delta h_{BC} = -147 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

4. a) L'enthalpie est une fonction d'état donc sa variation ne dépend que de l'état initial et final du système et pas du chemin suivi.

- b) Le fluide subit la suite de transformations suivante :

État initial	État intermédiaire	État final
Liquide à la température T_2	Liquide à la température T_1	Vapeur à la température T_1 (fraction massique x) et liquide à la température T_1 .

Lors du passage de l'état initial à l'état intermédiaire, la variation d'enthalpie massique est $\Delta h_3 = c_l(T_1 - T_2)$.

Lors du passage de l'état intermédiaire à l'état final, la variation d'enthalpie massique s'écrit $\Delta h_4 = xL_v(T_1)$.

De plus, cette transformation est isenthalpique donc :

$$\Delta h_3 + \Delta h_4 = 0.$$

c) Finalement :

$$c_l(T_1 - T_2) + xL_v(T_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c_l(T_2 - T_1)}{L_v(T_1)}.$$

d) Application numérique $x \approx 41,1\%$.

5. a) On a simplement $\Delta h_{DA} = (1 - x)L_v(T_1)$.

b) Application numérique $\Delta h_{DA} \approx 100 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

6. a) Sur un cycle $\Delta h = 0 = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA}$ ce qui donne numériquement $\Delta h = -300 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ qui n'est pas nul mais cet écart est peut être lié aux erreurs d'arrondi.

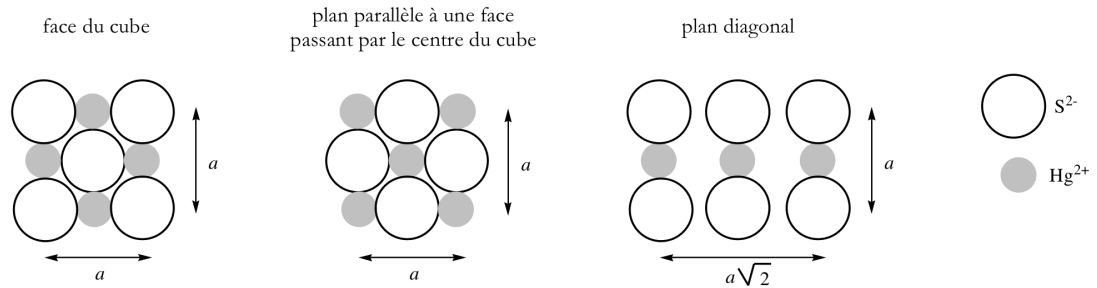
b) i - $e_{fr} = \frac{q_{DA}}{w} \approx 2,1$.

ii - En divisant les deux termes dans l'expression de l'efficacité par le temps, on obtient un rapport de puissances donc $P_{meca} = P_{thermique}/e_{fr} \approx 480 \text{ kW}$.

iii - On connaît la quantité d'énergie thermique prélevée à la cellule $q_{DA} = \frac{Q_{DA}}{m} = \frac{Q_{DA}/\Delta t}{m/\Delta t} = P_{thermique}/D_m$. D'où $D_m = P_{therm}/q_{DA} \approx 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution de l'exercice 19

1.



2. On compte 8 ions sulfure aux 8 sommets partagés chacune par 8 mailles, et 6 ions sulfure aux 6 centres de faces partagés chacun par 2 mailles, soit $8/8+6/2 = 4$ ions S^{2-} par maille. On compte 12 ions mercure aux milieux des 12 arêtes, partagés chacun par 4 mailles, et un ion mercure au centre de la maille, soit $12/4+1 = 4$ ions Hg^{2+} par maille. Il y a donc en tout 4 motifs HgS par maille.
3. Anions et cations sont tangents suivant une arête, soit : $a = 2r_{Hg^{2+}} + 2r_{S^{2-}} = 580$ pm.
La masse volumique est : $\rho = \frac{4(M_{Hg}+M_S)}{Naa^3} \approx 7,79 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
4. La structure NaCl implique la tangence des anions et des cations suivant l'arête de la maille, soit $a = 2r_+ + 2r_-$, sans qu'il y ait tangence des anions suivant la diagonale d'une face, soit : $a\sqrt{2} > 4r_-$. La résolution donne : $r_+/r_- > \sqrt{2} - 1 = 0,414$.
5. Numériquement, $r_{Hg^{2+}}/r_{S^{2-}} \approx 0,71$. La structure NaCl est envisageable pour le cinabre.
6. La compacité s'écrit :

$$C = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi(r_+^3 + r_-^3)}{a^3} \approx 0,57$$