Corrigé

Plan de travail n° 9
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Théorème du moment cinétique

Solution de l'exercice 1

Son moment cinétique s'écrit $\sigma_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr\vec{e}_r \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. Le moment cinétique ets donc dirigé selon l'axe O_z et dans le même sens que $\vec{e}_z$ si $\dot{\theta} > 0$.

Solution de l'exercice 2

D'après la loi du tire-bouchon, on peut dire que le moment cinétique est positif.

Solution de l'exercice 3

D'après le cours : $\sigma_\Delta = J_\Delta\omega$.

Solution de l'exercice 4

Le moment cinétique du solide de gauche est plus faible que celui du solide de droite.

Solution de l'exercice 5

Le bras de levier s'écrit $d = R\sin\theta$ et $\mathcal{M}_{O_z} = -FR\sin\theta$.

Solution de l'exercice 6

$\mathcal{C} = 2Fa$.

Solution de l'exercice 7

Ils sont tous constants, sauf celui de la toupie si son axe de rotation n'est pas vertical.

Solution de l'exercice 8

Toute la démonstraion est dans le cours.

Solution de l'exercice 9

L'équation différentielle est du même type que celle d'un pendule simple. Ce qui change c'est que la pulsation propre du pendule pesant (dans le cadre des petits mouvements) dépend de la masse du pendule par l'intermédiaire du moement d'inertie.

Solution de l'exercice 10

Revoir la démonstration faite en cours.

Solution de l'exercice 11

L'application du théorème du moment cinétique donne $J_\Delta\dot{\omega} = \overrightarrow{OM} \wedge F \cdot e_\Delta = dF$ avec d le bras de levier. Le théorème de la puissance cinétique donne $J_\Delta\omega\dot{\omega} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ avec $v = d\omega$ d'où $J_\Delta\dot{\omega} = dF$. On obtient exactement la même équation avec les deux théorèmes.

Solution de l'exercice 12

1. $\vec{\mathcal{M}}_O = -ymg\vec{e}_x + xmg\vec{e}_y$.

2. $\mathcal{M}_{Oz} = 0$.

Solution de l'exercice 13

1. $\vec{L}_{O_1} = mR^2\omega\vec{e}_z + m\ell R\omega\cos\alpha\,\vec{e}_r$.
2. $\dfrac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = mgR\vec{e}_\theta$.

Solution de l'exercice 14

1. $\vec{L}_O = mr_0v_0\vec{e}_z$
2. $\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(0)\exp\left(-\dfrac{\alpha}{m}t\right)$.

Solution de l'exercice 15

1. Force centrale donc mouvement plan (voir le cours pour la démonstration).
2. $K_0 = -C = -a_0^2v_0^2$, mouvement borné si $K < K_0$, mouvement non borné sinon.
3. Raisonner avec l'énergie potentielle efficace. Si $K = K_0$, cercle de rayon a_0.Si $K > K_0$ alors le mouvement est un état de diffusion dans tous les cas. De même si $K < K_0$ le mouvement est un état lié si l'énergie mécanique est négative.
4. Il faut partir de l'expression de l'énergie mécanique en fonction de l'énergie potentielle efficace puis isoler $\dot{r}$. Ensuite il faut séparer les variables et déterminer la primitive à l'aide du changement de variable indiqué.

Solution de l'exercice 16

1. Modèle du cylindre creux.
2. $\mathcal{M}_\Delta(F) = -2FR$.
3. $J\ddot{\theta} = -2FR$.
4. $\theta(t) = \omega_0 t - \left(\dfrac{FR}{J}\right)^2 t^2$.
5. $F = 3{,}0\,\mathrm{N}$.

Solution de l'exercice 17

1. a) $J_\Delta\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 - k\omega$.

   b) $\omega = \omega_0\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$ avec $\omega_0 = \dfrac{\Gamma_0}{k}$ et $\tau = \dfrac{J_\Delta}{k}$.
2. a) $\dfrac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\epsilon}{\tau} + \dfrac{\eta}{\tau}\cos(\Omega t)$.

   b) $a = \dfrac{\eta}{1+\Omega^2\tau^2}$ et $\varphi = -\arctan(\Omega\tau)$.
3. Augmentation de J_Δ et diminution de a.

Solution de l'exercice 18

1. $\ell_0 = r - z$.
2. $C = a_0 v_O$.
3. $T = m'(g + \ddot{r})$.
4. $\dot{r}^2 = \dfrac{2m'g}{m+m'}(a_0 - r) + \dfrac{ma_0^2v_0^2}{m+m'}\left(\dfrac{1}{a_0^2} - \dfrac{1}{r^2}\right)$.

5. $r_2 = a_0$ et $r_1 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{mv_0^2}{2m'g} + \sqrt{\left(\dfrac{mv_0^2}{2m'g}\right)^2 + \dfrac{2mv_0^2 a_0}{m'g}}\right]$.

Solution de l'exercice 19

1. On applique le principe fondamental de la dynamique et on obtient $\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z} = cte = 0$ et $z = cte$ donc mouvement plan.
2. $\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = Ke\ln\dfrac{r}{a}$
3. $r^2\dot{\theta} = \dfrac{eB_0}{2m}(r^2 - a^2)$.
4. $\dfrac{2Ke}{m}\ln\dfrac{r}{a} = \dot{r}^2 + r^2\dfrac{e^2B_0^2}{4m^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)^2$.
5. $B_{min}^2 = \dfrac{8mK}{eb^2}\dfrac{b^4}{(b^2 - a^2)^2}\ln\dfrac{b}{a}$.
6. $f = 1,21$ GHz.

Solution de l'exercice 20

1. a) $\mathcal{M}_{\Delta_2} > 0$ pour Δ_1 cela dépend de la position de G.
   b) Moment nul.
   c) Comme le moment par rapport à Δ_2 est toujours positif, le solide recolle toujours au support.
   d) Le changement se fait avec le changement de signe de $\mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{P})$.
2. a) Basculement si $Fh \geqslant \dfrac{mga}{2}$.
   b) $W_{min}(\vec{F}) = \dfrac{mga}{2}(\sqrt{2} - 1)$.
   c) Il faut que $F > T$.
   d) $W_{min}(\vec{F}) = \mu mg\ell$
   e) Plus facile de faire rouler si $\mu > \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

Solution de l'exercice 21

1. Au point M_1 s'applique les forces :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 & = mg\vec{u}_z \\ \vec{R}_1 & = -R_1\vec{u}_z \\ \vec{T}_1 & = -T\vec{u}_r \end{cases}$$

   Avec R_1 et T des grandeurs positives. De même pour M_2 :

$$\begin{cases} \vec{P}_2 & = mg\vec{u}_z \\ \vec{T}_2 & = -T\vec{u}_z \end{cases}$$

   Les normes de T_2 et T_1 sont égales car le fil est inextensible.
2. Pour le point M_2 c'est simple :

$$m\ddot{z} = mg - T.$$

On détermine l'accélération de M_1 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM_1} &= r\vec{u}_r \\
\vec{v}_1 &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \\
\vec{a}_1 &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi
\end{aligned}$$

On applique maintenat le PFD au point M_1 : $m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1$. On en déduit en projetant selon les trois axes :

$$\begin{cases}
mg_1 - R_1 = 0 \\
m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T \\
2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0
\end{cases}$$

3. Pour M_1 :

$$\vec{\sigma}_O(M_1) = \overrightarrow{OM_1} \wedge m\vec{v}_1 = mr^2\dot{\varphi}\vec{u}_z.$$

Pour M_2 :

$$\vec{\sigma}_O(M_2) = \overrightarrow{OM_2} \wedge m\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

4. On applique le théorème du moment cinétique au point M_2 en O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M_1)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{R}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}_1)$$

Or d'après la question précédente $mg_1 - R = 0$ et de plus $\vec{T}_1$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}_1) = \vec{0}$. D'où

$$mr^2\dot{\varphi} = cte = mr_0^2\omega_0.$$

On en déduit :

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\omega_0.$$

5. On a $\ddot{z} = g - T/m$ or $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T$ donc :

$$\ddot{z} = g + \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

6. On a une relation de plus entre $\ddot{z}$ et $\ddot{r}$: $z + r = L = cte$ donc $\ddot{z} + \ddot{r} = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
2\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -g \\
2\ddot{r} - r\left(\frac{r_0}{r}\right)^4\omega_0^2 &= -g \\
2\ddot{r} - \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} &= -g
\end{aligned}$$

On a donc $K = r_0^4\omega_0^2$.

7. Si le mouvement est circulaire uniforme alors $\ddot{r} = 0$ et $r = cte = r_0$ d'où :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{r_0}.$$

Solution de l'exercice 22

1. $\vec{\sigma}_A = m\ell_0(\ell_0\dot{\theta} - a\Omega\cos\theta\sin\Omega t)\vec{u}_x$.
2. $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta + \dfrac{a}{\ell_0}\Omega^2\cos\theta\cos\Omega t$.
3. $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\frac{a}{\ell_0}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos\omega t$.
4. L'amplitude devient infinie.

Solution de l'exercice 23

1. À l'équilibre la somme des moments des forces par rapport à l'axe B_z est nulle donc :

$$R_A\ell - m_p g\left(\ell - \frac{L}{2}\right) + m_c g(c-\ell) = 0$$

donc :

$$R_A = g\left(m_p - m_c - \frac{L}{2\ell} - \frac{x}{\ell}\right).$$

2. La valeur maximale de x est celle qui annule R_A (si $R_A = 0$ alors il n'y a plus de contact) :

$$x_{max} = (m_p - m_c)\ell - \frac{L}{2}.$$

Solution de l'exercice 24

1. $R_A = (m_c + 6m_p)g - m_c g\dfrac{x}{\ell}$.
2. $x_{max} = \dfrac{9}{8}\ell = 3{,}375\,\mathrm{m}$.
3. $\tan\theta < \dfrac{1+u}{1-2u}f$ avec $u = \dfrac{18\epsilon}{35L}$.

II Le champ magnétique

Solution de l'exercice 2

Voir le tracé dans les vidéos.

Solution de l'exercice 3

Respectivement $1\times10^{-2}\,\mathrm{T}$, $1\,\mathrm{T}$, $1\times10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Solution de l'exercice 4

Tout simplement $m = IS = I\pi R^2$.

Solution de l'exercice 5

Le moment magnétique d'un aimant est orienté du pôle sud de l'aimant au pôle nord de l'aimant.

Solution de l'exercice 6

L'ordre de grandeur est de $0{,}1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

Solution de l'exercice 7

Dans l'ordre Faux, Vrai, Faux, Vrai, Faux, Faux, Faux, Vrai, Vrai.

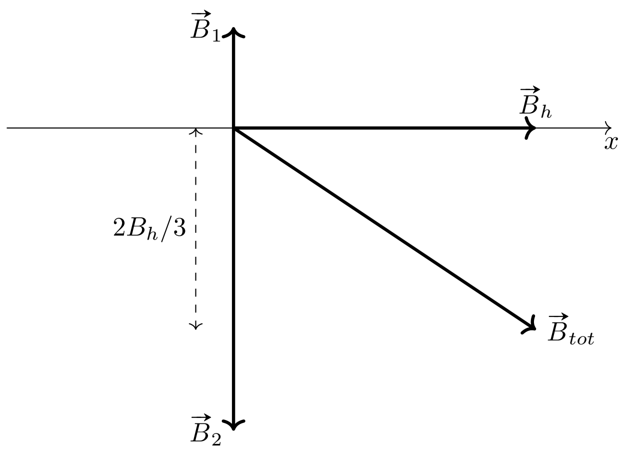
Solution de l'exercice 8

1. C'est cohérent.
2. a) $m \approx 0{,}2\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.
   b) $N = 3 \times 10^4$ spires.

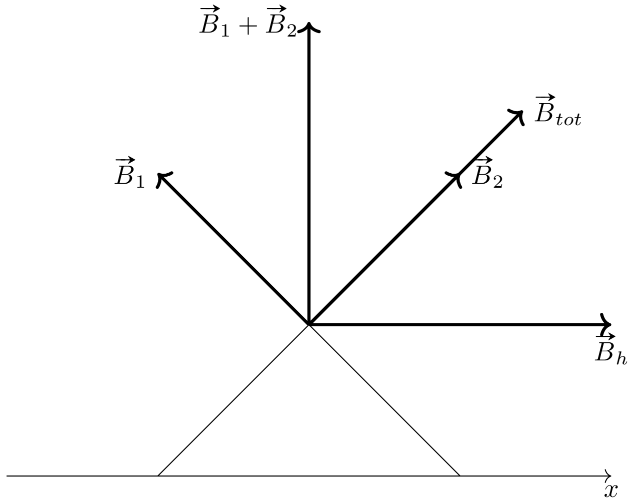
Solution de l'exercice 9

1. a) Voir le cours et la fameuse règle du tire-bouchon.
   b) $i = \dfrac{q_e v}{2\pi r}$.
   c) $L_{Oz} = mrv$.
   d) $v = \dfrac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}$ et $r = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mq_e^2}$
   e) $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m_e^2 q_e^7}{(4\pi\epsilon_0)^3}\dfrac{1}{\hbar^5} = 13\,\mathrm{T}$.
2. Moment cinétique nul donc $B = 0$.
3. Le spin !

Solution de l'exercice 10

1. $i_0 = \frac{2\pi a B_h}{\mu_0} \approx 10{,}5\,\mathrm{A}$.
2. On obtient $B_1 = B_h/3$ et $B_2 = B_h$.
3. 

4. $\tan\alpha = \frac{2B_h}{3B_h} = \frac{2}{3}$ donc $\alpha \approx 33{,}7\,^\circ$.
5. La hauteur de triangle est égale à la moitié du segment O_1O_2 donc le triangle POO_2 est isocèle et rectangle en O donc langle $\widehat{OPO_2}$ vaut $45\,^\circ$. De même pour l'angle $\widehat{O_1PO}$, on en déduit que l'angle $\widehat{O_1PO_2}$ vaut $90\,^\circ$.
6. $O_1P = O_2P = a\sqrt{2}$ donc $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a\sqrt{2}} = \frac{B_h}{\sqrt{2}}$.
7.



8. $||\vec{B}_1 + \vec{B}_2|| = 2||\vec{B}_1||\cos(45) = B_h$, on en déduit $\tan\alpha = \frac{||\vec{B}_1+\vec{B}_2||}{||\vec{B}_h||} = \frac{B_h}{B_h} = 1$ d'où $alpha = 45^\circ$

III Équilibres de précipitation

Solution de l'exercice 1

Pour tracer le diagramme d'existence de $Cu(OH)_2$, il faut trouver son pH d'apparition. Le précipité se forme si $[Cu^{2+}][HO^-]^2 > K_S$ donc si $[HO^-] > \sqrt{K_S}/[Cu^{2+}]$ qui peut s'écrire $pH > pK_e - \frac{1}{2}pK_s - \frac{1}{2}log([Cu^{2+}]) \approx 9,12 - 0,5\log([Cu^{2+}]) > 9,12$ si la concentration en Cu^{2+} est inférieure à $1\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

Ainsi On mélange NH_3 et Cu^{2+} dont les domaines sont disjoints, il ya donc une réaction quantitative qui se produit :

$$2\,NH_3 + Cu^{2+} + 2\,H_2O \rightleftharpoons 2\,NH_4{}^+ + Cu(OH)_2.$$

Dans une solution acide NH_3 réagira avec les ions H^+ pour former des ions $NH_4{}^+$ empêchant potentiellement la formation du précipité.

Dans une solution basique, les ions Cu^{2+} réagiront avec les ions HO^- pour former le précipité, les ions NH_3 restant alors en solution.

Solution de l'exercice 2

Il suffit de calculer le quotient réactionnel initial et de le comparer au K_S :

- $Q = [Cu^+]^2[S^{2-}]/(c^o)^3 \approx 1 \times 10^{-14} > K_s$ donc la solution est saturée ;
- $Q = [Fe^{3+}][HO^-]^3/(c^o)^4 \approx 1 \times 10^{-18} < K_s$ donc la solution n'est pas saturée.

Solution de l'exercice 3

En prenant le pH au niveau du point anguleux : $pH \approx 2,2$, on en déduit le quotient réactionnel qui est égal au K_S :

$$Q = [Ag^+]^2[CrO_4{}^{2-}]/(c^o)^3 \approx 6{,}31 \times 10^{-3} = K_S.$$

Solution de l'exercice 4

1. a) $s_0(\text{AgCl}) = 1{,}4 \times 10^{-5}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $s_0(\text{AgI}) = 7{,}9 \times 10^{-9}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
   b) $K^0 = 3 \cdot 10^6$.
2. a) $s_0 = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
   b) $K = 4,4 \cdot 10^{17}$.

Solution de l'exercice 5

1. HgI_2 est moins soluble que PbI_2.
2. a) À vous de chercher.
   b) $pK_S(\text{HgI}_2) = 28,2$; $pK_s(\text{PbI}_2) = 8,2$.
3. $K^0 = 10^{20}$.

Solution de l'exercice 6

1. $s = 8{,}9 \times 10^{-10}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $pK_S = 21$.
2. $s = 1{,}35 \times 10^{-6}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.