Corrigé

Plan de travail n° 8
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou un champ magnétique

Solution de l'exercice 1

Pour la force électrique :

$$\frac{qE}{mg} \approx \frac{1 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{2}}{1 \times 10^{-27} \times 10} = 1 \times 10^{9}.$$

Pour la force magnétique :

$$\frac{qvB}{mg} \approx \frac{1 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{2} \times 1e-2}{1 \times 10^{-27} \times 10} = 1 \times 10^{7}.$$

Solution de l'exercice 2

La puissance de la force électrique s'écrit $P = q\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v}$ qui peut valoir au maximum $P = qEv \neq 0$, donc la force électrique peut accélérer ou freiner une particule.

La puissance de la force magnétique s'écrit $P = (q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$, donc la force magnétique ne peut accélérer ou freiner une particule.

Solution de l'exercice 3

On trouve simplement en appliquant le PFD : $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}$ donc $\overrightarrow{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{cte}$. Le mouvement est un mouvement à accélération constante (trajectoire parabolique).

Solution de l'exercice 4

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qU \Leftrightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}}.$$

Solution de l'exercice 5

On peut citer :

- l'accélérateur linéaire ;
- le spectroscope de masse.

Solution de l'exercice 6

Voir la méthode dans le cours.

Solution de l'exercice 7

1. $y = \dfrac{eU}{2mv_0^2 d}x^2$
2. $y = \dfrac{eU\ell}{mv_0^2 d}\left(x - \dfrac{\ell}{2}\right)$.
3. $y = \dfrac{eU\ell}{mv_0^2 d}\left(\ell' + \dfrac{\ell}{2}\right)$.
4. Tension en dents de scie.

Solution de l'exercice 8

1. cf. cours.
2. $t = \dfrac{\pi m}{|qB|} = 3,3 \cdot 10^{-8}$ s.
3. $f = 1,5 \cdot 10^7$ Hz.
4. $\Delta E_c = 4,0 \cdot 10^{-16}$ J $= 2,5$ keV.
5. Environ 650 tours.
6. $R = 0,26$ m

Solution de l'exercice 9

1. $v_N = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}} = 4,4$ ou $4,2$ m·s^{-1}.
2. $E = v_{20}B = 4{,}4 \times 10^4\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.
3. Sélection d'un isotope particulier.

II Description macroscopique de la matière

Solution de l'exercice 1

$N_A \approx 6 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ donc $m_\mathrm{H} = 1e-3/N_A \approx 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Solution de l'exercice 2

- la Terre, système fermé ;
- un gaz dasn un turbo-réacteur, système ouvert ;
- l'univers, système isolé ;
- du café dans une bouteille themos, système isolé ;
- une résistance dansun circuit électriue en fonctionnement, système fermé.

Solution de l'exercice 3

Dans le diagramme de Clapeyron, on remarque que le gaz réel se rapproche du GP quand le volume augmente et à pression donnée quand la température augmente.

Dans le diagramme d'Amagat, le comportement du gaz réel se rapproche de celui du GP quand la température augmente et quand la pression diminue.

Solution de l'exercice 4

En prenant $P = 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ et $T = 293\,\mathrm{K}$, on trouve :

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Leftrightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \approx 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^3}.$$

Solution de l'exercice 5

À l'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur le piston est nulle :

$$PS - P_0 S - mg = 0 \Leftrightarrow P = P_0 + \frac{mg}{S}.$$

Solution de l'exercice 6

Pour le dioxygène assimilable à un gaz parfait : $V_m = M(\mathrm{O_2})/\rho \approx 26{,}5\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$.
Pour l'eau : $V_m = M/rho \approx 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{l} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$.

Solution de l'exercice 7

Pour le diagramme P, T :

1. gaz ;
2. liquide ;
3. solide.

Pour le diagramme P, v :

1. équilibre liquide-vapeur ;
2. fluide hypercritique ;
3. gaz ;
4. liquide.

Solution de l'exercice 8

On observe :

- solidification ;
- vaporisation ;
- passage continu du gaz au liquide (sans jamais apparition d'une interface vapeur/liquide ;
- sublimation.

Solution de l'exercice 9

À priori, il faut donner P, V et T mais à la condition d'équilibre impose que la pression dépend de la température donc T et V suffisent.

Solution de l'exercice 10

La compressibilité est donnée par $-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}$ et sur la courbe on peut déterminer $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ qui est la pente de la courbe. aisi dans la phase liquide cette pente est très important donc la compressibilité est quasi-nulle.

Solution de l'exercice 11

Choisissez un point et utilisez le théorème des moments pour en déterminer la composition.

Solution de l'exercice 12

Il faut éviter le risque d'explosion rapide en cas d'incendie donc si la température augment, la bouteille doit se remplr de gaz et non de liquide.

Solution de l'exercice 13

1. 0,447 litres.
2. 0,960 litres.
3. 24,5%.

Solution de l'exercice 14

0,83 kg

Solution de l'exercice 15

703 bar.

Solution de l'exercice 16

Notons V_i le volume immergé du glaçon et V_e son volume emergé. Le glaçon flotte donc la poussée d'Archimède compense le poids :

$$\rho_e V_i g = \rho_g (V_i + V_e) g \Leftrightarrow \rho_e V_i = \rho_g (V_i + V_e).$$

Une fois le glaçon fondu, on récupère une masse d'eau égale à la masse de glace $m_e = \rho_g(V_i + V_e) = \rho_e V_i$, ce qui correspond à un volume d'eau $V_e = m_e/\rho_e = V_i$. Conclusion : le verre ne déborde pas et le niveau d'eau reste le même.

Solution de l'exercice 17

1. $\alpha_L = \dfrac{1}{L}\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T}$.
2. Prévoir un joint de dilatation.
3. Dans les ponts, les voies de chemin de fer ...

Solution de l'exercice 18

1. $P_n V_0 + P_0 V_1 = P_{n+1}(V + v_2)$.
2. $P_{lim} = P_0 \dfrac{v_1}{v_2}$.
3. $P_n = P_{lim} + (P_0 - P_{lim}) \left(\dfrac{V}{V + v_2}\right)^2$.

Solution de l'exercice 19

Partie I — Plongée libre

1. $V(z) = \dfrac{P_{atm} V_m}{P_{atm} + \rho g z} \approx 3{,}6\,\mathrm{L}$ pour $z = 10\,\mathrm{m}$.
2. $m_1 = \dfrac{\rho P_{atm} V_m}{P_{atm} + \rho g z_1} + \rho V_0 - m \approx 1{,}72\,\mathrm{kg}$.

Partie II — Plongée avec bouteilles

1. $z < \dfrac{\frac{P_{lim}}{0{,}8} - P_{atm}}{\rho g} \approx 61\,\mathrm{m}$.
2. $n_i = \dfrac{(P_{atm} + \rho g z) V_0}{RT}$.
3. $\Delta t = \dfrac{V_b}{f V_0} \dfrac{P_i - P_s}{P_{atm} + \rho g z} = 6\,\mathrm{min} 43\,\mathrm{s}$.

Solution de l'exercice 20

1. c.f. cours
2. a) $B = b - \frac{a}{RT}$ et $C = b^2$
   b) $B' = \frac{B}{RT}$ et $C' = \frac{C - B^2}{(RT)^2}$
   c) $T = \frac{a}{bR}$

Solution de l'exercice 21

Partie I — Le ballon stratosphérique ouvert

1. Au décollage dans le ballon :
$$P_0V = nRT_0.$$
D'où :
$$m_{gaz} = n \cdot M_{\mathrm{He}} = \frac{P_0V}{RT_0}M_{\mathrm{He}} = 17{,}6\,\mathrm{kg}.$$

2. Les seules forces qui s'exercent sont le poids et la poussée d'Archimède et le ballon décolle si la poussée d'Archimède est supérieure au poids :
$$\begin{aligned}(m+m_{gaz})g &< m_{air}g = \frac{P_0V}{RT_0}M_{air}g\\ m &< \frac{P_0V}{RT_0}M_{air} - m_{gaz}\\ m &< \frac{P_0V}{RT_0}(M_{air} - M_{\mathrm{He}}))\end{aligned}$$
Application numérique : $m < 110\,\mathrm{kg}$.

3. Au cours de son ascension, le ballon voit la pression extérieure diminuer, la pression dans le ballon diminue donc. Comme $PV = nRT_0$, que $V = cte$ ainsi que T_0, nécessairement c'est le nombre de mole d'hélium dans le ballon qui diminue. Le ballon se vide petit à petit et s'allège. Le poids diminue donc mais la poussée d'Archimède aussi car le poids du volume d'air déplacé diminue aussi avec l'altitude.

4. Le ballon plafonne si le poids égale la poussée d'Archimède :
$$\begin{aligned}(m+m_{gaz})g &= m_{air}g = \frac{PV}{RT_0}M_{air}\\ \frac{PV}{RT_0}M_{air} &= m + \frac{PV}{RT_0}M_{\mathrm{He}}\\ \frac{PV}{RT_0}(M_{air} - M_{\mathrm{He}}) &= m\\ P &= \frac{mRT_0}{V(M_{air} - M_{\mathrm{He}})}\\ P_0\exp(-z_{max}/H) &= \frac{mRT_0}{V(M_{air} - M_{\mathrm{He}})}\\ z_{max} &= H\ln\left(\frac{P_0V}{RT_0}\cdot\frac{M_{air} - M_{\mathrm{He}}}{m}\right)\end{aligned}$$
Application numérique : $z_{max} = 19\,\mathrm{km}$.

Partie II — Cas d'un ballon fermé

1. La quantité d'hélium stockée dans le ballon est cette fois constante. Comme $PV = nRT_0 = cte$, lorsque la pression extérieur diminue, celle dans le ballon doit aussi diminuer (équilibre des forces s'exerçant sur l'enveloppe du ballon), donc V augmente jusqu'à provoquer l'éclatement du ballon.

2. σ s'exprime en Pam $= \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. On applique cette relation au décollage :

$$P_{int} - P_0 = \frac{4\sigma}{r_0}$$
$$\sigma = \frac{P_{int} - P_0}{4} r_0$$

Or initialement le ballon est rempli avec 0,80 kg d'hélium donc :

$$P_{int} = \frac{mRT_0}{M_{\mathrm{He}} V_0}.$$

Application numérique :

$$P_{int} = 1{,}08 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$
$$\sigma = 2{,}1 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

3. Quand le ballon atteint son altitude maximale, on a $P_{int} = \frac{mRT_0}{M_{\mathrm{He}} V_{max}} = 8{,}91 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$, on peut en déduire $P_{ext} = P_{int} - \dfrac{4\sigma}{r_{max}} = 5{,}26 \times 10^3\,\mathrm{Pa}$. On en déduit alors $z_{max} = H \ln\left(\dfrac{P_0}{P_{ext}}\right) = 23\,\mathrm{km}$.

III Le premier principe de la thermodynamique

Solution de l'exercice 1

Pour un gaz parfait monoatomique $U = \frac{3}{2} nRT$. De manière générale, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

Solution de l'exercice 2

À priori l'énergie interne d'une phase condensée dépend de P, T et V, or le volume est constant et l'existence d'une équation d'état relie P et T donc finalement l'énergie interne ne dépend que de T.

Solution de l'exercice 3

On applique le premier principe au solide :

$$\Delta(E_c + U) = W + Q.$$

Si on note T_0 la température initale du solide et T_1 sa température finale :

$$\frac{1}{2} mv^2 + mc(T_1 - T_0) = -fmgd + Q.$$

Avec f le cœfficient de frottement et d la distance parcourue.

Solution de l'exercice 4

En appliquant le premier principe au système constitué de la réunion des deux gaz :

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

Donc :

$$\frac{3}{2}n_1R(T_f - T_1) + \frac{3}{2}n_2R(T_f - T_2) = 0.$$

Ce qui donne :

$$T_f = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}.$$

Solution de l'exercice 5

Car U est une fonction d'état, ce qui n'est pas le cas de W et Q.

Solution de l'exercice 6

Pour une transformation isotherme $\Delta U = 0 = W + Q$, d'où $Q = -W$. or $W = -\int_A^B P_{est}dV = -Q$, or la transformation est quasi-statique donc à chaque instant $O_{ext} = P$ d'où $Q = \displaystyle\int_A^B PdV = nRT_0 \int_A^B \frac{dV}{V} = nrT_0 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$.

Solution de l'exercice 7

$H_m = U_m + PV_m = U_m + RT$.

Solution de l'exercice 8

$H_m = U + PV_m$ or U ne dépend que de la température pour un gaz parfait et V_m est très faible pour une phase condensée donc $H_m \approx U_m$. H_m ne dépend donc que de la température pour une phase condensée.

Solution de l'exercice 9

Dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique initial et finalon peut écrire $\Delta H = W_u + Q$ avec W_u le travail des forces autres que les forces de pression.

Solution de l'exercice 10

Environ $4200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Solution de l'exercice 11

La variation d'enthalpie du système s'écrit $\Delta H = Q$ car la transformation est monobare, deplus $Q = 0$ donc $\Delta H = 0$. Si on décompose le système en un ensemble de sous-système (eau liquide, glace ...), on peut écrire :

$$(m_1 + m_c)c_e(T_f - T_1) + m_2c_g(T_0 - T_2) + m_2L_f + m_2c_e(T_f - T_0) = 0.$$

On isole L_f et on trouve :

$$L_f = \frac{(m_1 + m_c)(T_1 - T_f) + m_2c_g(T_2 - T_0) + m_2c_e(T_0 - T_f)}{m_2} \approx 246\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}.$$

Solution de l'exercice 12

Déplacement = 32 cm ; $P_2 = 3{,}2 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$ et $T_2 = 227\,\mathrm{K}$.

Solution de l'exercice 13

$r = 1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$.

Solution de l'exercice 14

1. $L = 45\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

2. $L = 41\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

Solution de l'exercice 15

Partie I — Préliminaires

1. c.f. cours.
2. Dans le cas d'un système macroscopiquement au repos :

$$\Delta U = W + Q.$$

3. Pour un gaz parfait, on a : $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$, d'où :

$$U_{mol} = \frac{RT}{\gamma - 1} + cte.$$

Partie II — Compression et détente adiabatique et quasi-statique

1. Si la transformation est une suite continue d'états d'équilibres, alors elle est quasi-statique. Rigoureseument, on ne paut pas faire une évolution continue d'états d'équilibres, mais si la transformation est suffisamment lente, on pourra la considérer comme quasi-statique.
2. a) C'est la loi de Laplace : $P_0V_0^\gamma = PV^\gamma$.
   b) On utilise l'équation d'état du gaz parfait pour élminer la pression :

$$P = \frac{nRT}{V}.$$

   D'où

$$T_0V_0^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1}.$$

3. On écrit l'équilibre mécanique du bouchon :

$$P_0 \cdot s - P_{atm} \cdot s - mg = 0.$$

   On obtient :

$$P_0 = P_{atm} + \frac{mg}{s}.$$

   a) On utilise la loi de Laplace :

$$\begin{aligned}
&P_0V_0^\gamma = (P_0 + \delta P)(V_0 + \delta V)^\gamma \\
\Leftrightarrow &P_0V_0^\gamma = (P_0 + \delta P)V_0^\gamma \left(1 + \frac{\delta V}{V_0}\right)^\gamma \\
\Leftrightarrow &P_0V_0^\gamma = P_0V_0^\gamma \left(1 + \frac{\delta P}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\delta V}{V_0}\right)^\gamma \\
\Leftrightarrow &1 = \left(1 + \frac{\delta P}{P_0}\right) \left(1 + \gamma\frac{\delta V}{V_0}\right)
\end{aligned}$$

   En ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient :

$$\delta P = -\gamma P_0 \frac{\delta V}{V_0}.$$

De la même manière, on obtient :

$$\delta T = -(\gamma - 1) T_0 \frac{\delta V}{V_0}.$$

4. On écrit le PFD appliqué au bouchon pour $z \neq 0$:

$$(P_0 + \delta P)s - mg - P_{atm} \cdot s = m\ddot{z}.$$

Ce qui donne (sans oublier l'équation d'équilibre) :

$$\ddot{z} + \frac{\gamma P_0 s^2}{m V_0} z = 0.$$

On obtient un oscillateur harmonique et on en déduit la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0 s^2}{m V_0}}.$$

5. A.N. : on doit d'abord déterminer P_0 : $P_0 = 1,015 \cdot 10^5$ Pa ; on détermine ensuite $\omega_0 = 4,35$ rad·s^{-1} et $T_0 = 1,44$ s.

Partie III — Compresion et détente isotherme

1. Si les échanges thermiques sont instantanés entre le milieu extérieur et le système alors on peut considérer que la température du système reste constante. L'idéal est d'utiliser des parois très conductrice de la chaleur comme certains métaux.
2. On détermine tout d'abord le travail en considérant la transformation quasi-statique : $\delta W = -P\mathrm{d}V$, or $P = \dfrac{nRT}{V}$ et :

$$\delta W = -nRT \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

On intègre en considérant $T = cte$ et on obtient :

$$W = -nrT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -P_1 V_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

On utilise ensuite le premier principe appliqué au gaz :

$$\Delta U = 0 = Q + W.$$

Et finalement :

$$Q = P_1 V_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

Au cours d'une compression $Q < 0$ et la gaz fournit de l'énergie thermique au milieu extérieur. C'est l'opposé dans le cas d'une détente.
Si maintenant on considère que le transformation est brutale à $P_{ext} = P_2$ pression finale du système à l'équilibre, on a alors :

$$W = -P_2(V_2 - V_1).$$

Avec $P_2V_2 = P_1V_1$ $(T = cte)$ d'où :

$$W = P_1V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right).$$

Finalement :

$$Q = P_1V_1 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right).$$

Au cours d'une compression $(V_2 < V_1)$ $Q < 0$ et au cours d'une détente $Q > 0$.

Solution de l'exercice 16

1. a) $\alpha = \frac{P_2}{P_1}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

   b) $W_T = \frac{R\gamma}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$

2. a) $W'_T = \frac{R\gamma}{\gamma-1}T_1\left(x + \frac{a}{x} - 2\right)$.

   b) $W'_T < W_T$

   c) $W'_m = 2\frac{R\gamma}{\gamma-1}T_1\left(\sqrt{\alpha} - 1\right)$

   d) $\alpha = 1,219$

Solution de l'exercice 17

1. a) $P_f = \frac{R(T_0 + T_1)}{2V_0}$

   b) $\Delta U = \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_0)$

   c) $Q_1 = RT_0 \ln\left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0}\right)$

   d) $Q_2 = \Delta U_A + W$.

2. a) $P'_f = \frac{R(T_0 + T_1)}{2V_0}\left(\frac{2T_1}{T_0 + T_1}\right)^{\gamma}$

   b) $T_A = T_B = \frac{P'_f V_0}{R}$

   c) $\Delta U' = \frac{R}{\gamma-1}(2T_A - T_0 - T_1)$.

   d) $Q_3 = \Delta U'$

Solution de l'exercice 18

1. adiabatique + isochore.
2. $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$.