Corrigé

Plan de travail n° 7
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Filtrage linéaire

Solution de l'exercice 1

La formule s'écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} +\infty a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Solution de l'exercice 2

Par définition :

$$\begin{aligned}
S_{eff} &= \sqrt{\frac{S^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt} \\
&= \sqrt{\frac{S^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t - 2\varphi)}{2}dt} \\
&= \sqrt{\frac{S^2}{T}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t - 2\varphi)\right]_0^T} \\
&= \sqrt{\frac{S^2}{2}} \\
&= \frac{S}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3

Dans l'ordre :

- c'est une fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fréquence de coupure vaut $10\omega_1$, la composante de pulsation $100\omega_1$ du signal d'entrée est donc « coupée » et il ne reste que la composante de pulsation ω_1 avec une amplitude $S = |\underline{H}(j\omega_1)|S_1 = \frac{S_1}{\sqrt{1+\frac{1}{100}}} \approx S_1$ et un déphasage $\varphi = -\arctan(1/10) \approx -0{,}1\,\text{rad}$, donc finalement $u_s(t) = S_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$;
- c'est une fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1 dont la fréquence de coupure vaut $10\omega_1$, la composante de pulsation ω_1 du signal d'entrée est donc « coupée » et il ne reste que la composante de pulsation $100\omega_1$ avec une amplitude $S = |\underline{H}(100j\omega_1)|S_1 = \frac{10S_1}{\sqrt{1+100}} \approx S_1$ et un déphasage $\varphi = \pi/2 - \arctan(10) \approx 0{,}1\,\text{rad}$, donc finalement $u_s(t) = S_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$;

- calculons le module de la fonction de transfert pour les deux pulsations du signal d'entrée : $|\underline{H}(j\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{(1-1/1000)^2+(1/10000)^2}} \approx 1$ et $|\underline{H}(j\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{(1-1/10)^2+(1/100)^2}} \approx 1,1$, faisons de même pour le déphasage $\varphi(\omega_1) = -\arctan(\frac{1/10000}{1-1/1000}) \approx -1 \times 10^{-4}$ et $\varphi(100\omega_1) = -\arctan(\frac{1/100}{1-1/10}) \approx -1 \times 10^{-2}$; alors le signal de sortie s'écrit :

$$u_s(t) = S_1 \cos(\omega_1 t) + 1,1 S_1 \cos(100\omega_1 t - 0,01);$$

- calculons le module de la fonction de transfert pour les deux pulsations du signal d'entrée : $|\underline{H}(j\omega_1)| = \frac{1/10}{\sqrt{(1-1/1000)^2+(1/10000)^2}} \approx 0,1$ et $|\underline{H}(j\omega_1)| = \frac{1/10}{\sqrt{(1-1/10)^2+(1/100)^2}} \approx 0,11$, faisons de même pour le déphasage $\varphi(\omega_1) = \pi/2 - \arctan(\frac{1/10000}{1-1/1000}) \approx \pi/2$ et $\varphi(100\omega_1) = \pi/2 - \arctan(\frac{1/100}{1-1/10}) \approx \pi/2$; alors le signal de sortie s'écrit :

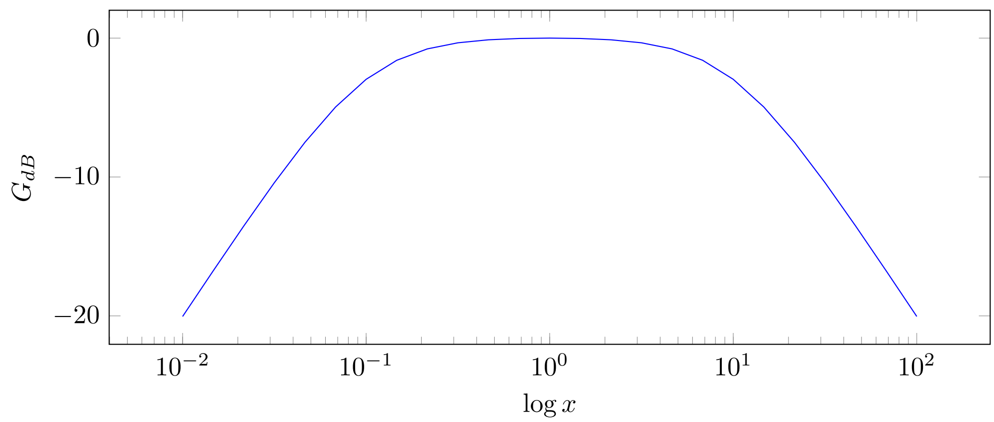
$$u_s(t) = -0,1 S_1 \sin(\omega_1 t) - 0,11 S_1 \sin(100\omega_1 t);$$

Solution de l'exercice 4

Il suffit de calculer le module :

$$G_{dB} = 20\log(10x) - 10\log\left(\left(1-x^2\right)^2 + (10x)^2\right),$$

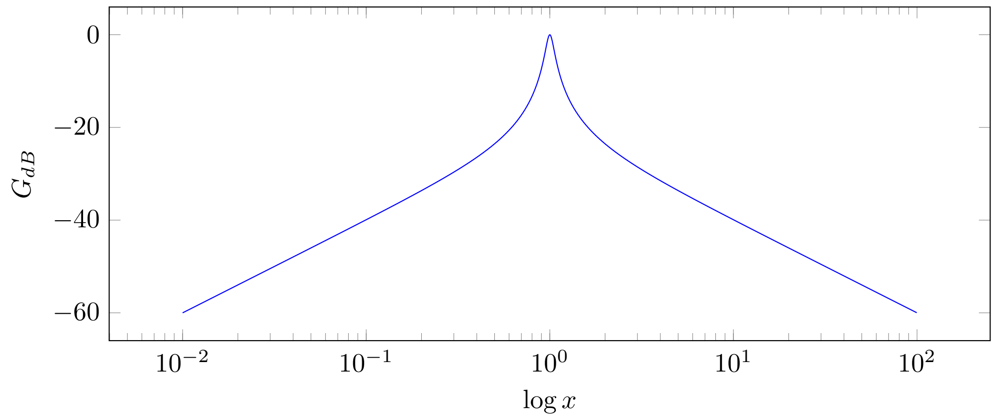
avec $x = \omega/1500$:



De même pour le second filtre :

$$G_{dB} = 20\log(x/10) - 10\log\left(\left(1-x^2\right)^2 + (x/10)^2\right),$$

avec $x = \omega/1500$:



Les pentes des asymptotes sont toutes de ±20dB/décade.

Solution de l'exercice 5

Pour réaliser un moyenneur, il ne faut garder que la composante continue du signal et couper toutes les autres fréquences. Il faut donc utiliser un filtre passe-bas avec un fréquence de coupure inférieure à $f = 8000\,\mathrm{Hz}$.

Pour dériver le signal d'entrée, il faut utiliser un filtre passe-haut dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Si $\omega \ll \omega_c$ alors la fonction de transfert est « équivalente » à $\underline{H}(j\omega) \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$ ce qui correspond en notation complexe à une opération de dérivation (multiplication par $j\omega$). Il suffit donc d'utiliser une filtre passe-haut donc la fréquence de coupure est largement supérieure à $f = 8000\,\mathrm{Hz}$.

Pour intégrer le signal d'entrée, il faut utiliser un filtre passe-bas dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Si $\omega \gg \omega_c$ alors la fonction de transfert est « équivalente » à $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$ ce qui correspond en notation complexe à une opération d'intégration (division par $j\omega$). Il suffit donc d'utiliser une filtre passe-bas donc la fréquence de coupure est largement inférieure $f = 8000\,\mathrm{Hz}$.

Solution de l'exercice 6

1. $U_s = R_3/(R_1 + R_3)$ en haute fréquence et $U_s = R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$ en basse fréquence.
2. $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$; $\tau_1 = R_2C$; $\tau_2 = R_2C\dfrac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$.

Solution de l'exercice 7

1. Passe-bas.
2. $\alpha = R_1R_2C_1C_2$ et $\beta = R_2C_2 + R_1(C_1 + C_2)$.
3. Non, même pulsation de coupure mais $Q = 1/2$ au lieu de $1/3$.
4. Rapport des amplitudes de $1/3$ et non $1/2$
5. Dans ce cas $\underline{H} = \underline{H}_1^2$.

Solution de l'exercice 8

1. Le signal de sortie est identique au signal d'entrée.
2. Le signal de sortie est triangulaire.

Solution de l'exercice 9

1. On obtient respectivement un filtre passe-haut, passe-bande et passe-bas.
2. $\omega_0 = 1/\tau$ et $Q = 1$.

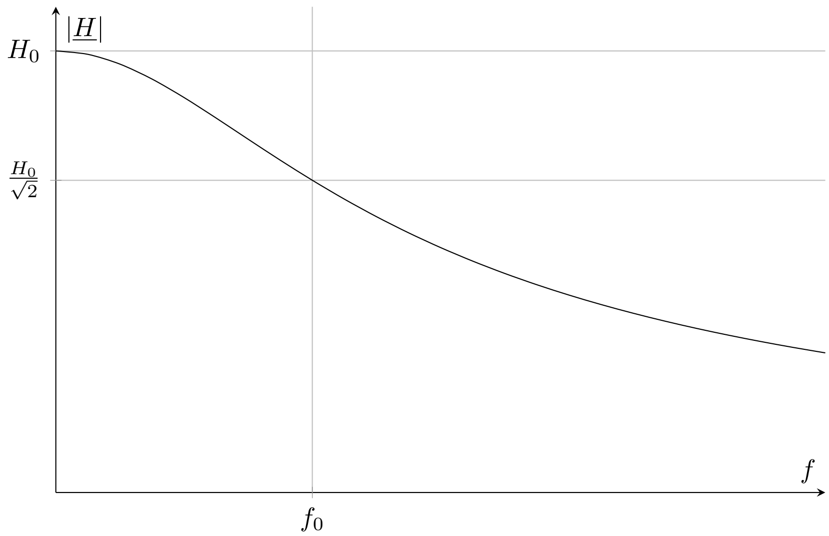
Solution de l'exercice 10

1. a) À basse fréquence le condensateur agit comme un interrupteur ouvert et on a donc $u_s = u_e$ car aucun courant ne passe et la tension aux bornes de la résistance est nulle. À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil et la tension à ses bornes est nulle. On en déduit que le circuit est un filtre passe-bas.

   b) C'est trivial :
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{H_0}{1 + jf/f_0},$$
   avec $H_0 = 1$ et $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$

   c) Toujours aussi trivial, on obtient comme par hasard $f_c = f_0$.

   d) On a :
$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}.$$
   Voici le tracé :



   e) Si $f \ll f_c$ alors $|\underline{H}| \approx H_0$, et si $f \gg f_c$ alors $|\underline{H}| \approx H_0 \frac{f_c}{f}$. On retrouve bien le comportement passe-bas du filtre.

   f) $\Psi = \arg \underline{H} = \arg H_0 - \arg(1 + jf/f_0) = -\arctan(f/f_0)$.

2. a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} v_{ref}(t)v_e(t) &= V_{ref}V_e\cos^2(2\pi ft) + V_{ref}b_0\cos(2\pi ft)\cos(2\pi f_bt) \\ \Leftrightarrow v_{ref}(t)v_e(t) &= \frac{V_{ref}V_e}{2} + \frac{V_{ref}V_e}{2}\cos(4\pi ft) + \frac{V_{ref}b_0}{2}(\cos(2\pi(f+f_b)t) + \cos(2\pi(f-f_b)t) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$A = B = \frac{V_{ref}V_e}{2} \text{ et } C = \frac{V_{ref}b_0}{2}.$$

b) Pour le signal parasite, on trouve une fréquence à $f + f_b = 1100\,\text{Hz}$ et une autre à $f - f_b = 100\,\text{Hz}$.

c) Comme tous les composants du filtre sont linéaires, on peut écrire que $u_s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ avec :

$$\begin{cases} s_1 &= AH_0 \\ s_2 &= B|\underline{H}(2f)|\cos(4\pi ft + \Psi(2f)) \\ s_3 &= C|\underline{H}(f-f_b)|\cos(2\pi(f-f_b)t + \Psi(f-f_b)) \\ s_4 &= C|\underline{H}(f+f_b)|\cos(2\pi(f+f_b)t + \Psi(f+f_b)) \end{cases}$$

d) On veut donc que $|\underline{H}(f - f_b)| = 1/1000$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} 10^{-6} &= \frac{H_0^2}{1 + \left(\frac{f-f_b}{f_c}\right)^2} \\ \Leftrightarrow 10^{-6}(f_c^2 + (f-f_b)^2) &= f_c^2 \\ \Leftrightarrow f_c &\approx 10^{-3}(f - f_b) \end{aligned}$$

On obtient :

$$f_c = 10^{-3}(f - f_b) = 0{,}1\,\text{Hz}.$$

e) En sortie de ce filtre, on obtient donc une tension $u_s \approx s_1$ car s_2, s_3 et s_4 sont atténuées au moins d'un facteur 1000. D'où $u_s = A = \frac{v_{ref}V_e}{2}$ ce qui, connaissant V_{ref}, permet de mesurer V_e.

Solution de l'exercice 11

1. Lorsque le parent pousse la balançoire, il impose en entrée du système mécanique un signal qui ets un train d'impulsion de fréquence f qui est égale à la fréquence d'oscillation de la balançoire. comme le mouvement est sinusoïdal, cela implique que la balançoire ne sélectionne su'une seule fréquence du signal d'entrée qui est celle du fondamental, la balançoire agit comme un filtre pass-bande.
2. si le parent ne pousse que tous les deux allers-retours alors la fréquence du fondamental du spectre s'impulsion est de $f/2$ et on retrouve une harmonique à la fréquence $2f/2 = f$ qui est filtrée par la balançoire et qui permet au système d'osciller, par contre l'amplitude du signal d'entrée n'est plus que de $2\alpha S_{max}\frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\alpha\pi}$ (amplitude de la première harmonique) au lieu de $2\alpha S_{max}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$. L'amplitude du mouvement de la balançoire est plus faible.

3. Si le parent pousse tous les N allers-retours alors la fréquence du fondamental est de f/N et la balançoire va osciller grâce à l'harmonique N de fréquence Nf/N d'amplitude $2\alpha S_{max}\frac{\sin((N-1)\alpha\pi)}{(N-1)\alpha\pi}$ qui devient faible (et l'enfant se met à hurler), voire même cette amplitude peut devenir nulle si $N = 1/\alpha$.

II Puissance et énergie

Solution de l'exercice 1

Dans le cas 1, la force est motrice et elle est résistante dans le cas 2.

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, le point M à une vitesse $v_{\mathcal{R}'}(M) = \dfrac{\mathrm{d}O'M}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}O'O}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}OM}{\mathrm{d}t} = v_0(-\vec{u}_x + \vec{u}_x) = \vec{0}$. La puissance de la force dans ce référentielle est donc nulle car la vitesse du point matériel est nulle.

Solution de l'exercice 2

Dans le cas 1 on utilise le théorème de la puissance cinétique et celui de l'énergie cinétique dans le cas 2.

Solution de l'exercice 3

Pour l'établissement des expressions, revoir le cours.

La première énergie potentielle correspond à une force en $1/r^2$, la deuxième au poids et la troisième à une force élastique.

Solution de l'exercice 4

La première et la dernière sont conservatives car le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position du point de départ et du point d'arrivée.

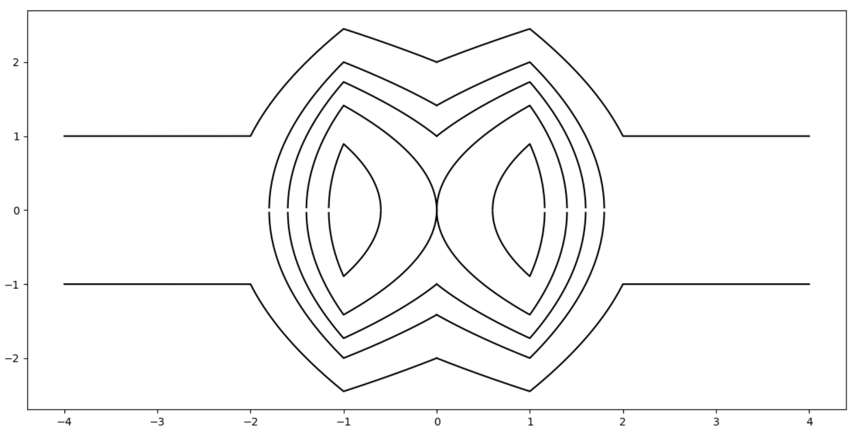
La deuxième est non conservative car son travail dépend du chemin suivi.

Solution de l'exercice 5

Le cas $E_m = 0{,}5\,\mathrm{J}$ correspond à un état de diffusion, le cas $E_m = -0{,}5\,\mathrm{J}$ à un état lié et le cas $E_m = 0\,\mathrm{J}$ à un état de diffusion.

Solution de l'exercice 6

Voici l'allure du portrait de phase :



Solution de l'exercice 7

Il y a une position d'équilibre instable lorsque l'énergie potentielle est maximale ($x \approx 0,5$) et une position d'équilibre stable losque l'énergie potentielle est minimale ($x \approx 3,3$).

Solution de l'exercice 8

Pour cela on pose $x = x_0 + \epsilon$ et on développe l'énergie potentielle :

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \epsilon \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0).$$

On calcule les érivées successives de l'énergie potentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = k(1-x^2) - 2kx^2 = k(1-3x^2) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = -6kx \end{cases}$$

On retrouve bien que x_0 est une position d'équilibre car $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ et qu'elle est stable car $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \dfrac{6k}{\sqrt{3}} = 2k\sqrt{3} > 0$. Donc :

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \times 2k\sqrt{3}.$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\epsilon} = -F_x = -ma = -m\ddot{\epsilon}$ d'où :

$$-m\ddot{\epsilon} = 2k\sqrt{3}\epsilon.$$

La période des petits mouvements autour de la position d'équilibre s'écrit donc $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k\sqrt{3}}}$.

Solution de l'exercice 9

Le minimum de l'énergie potentielle est d'environ $-1{,}3$ J et le premier état de diffusion est à environ 0 J. Il faut donc approter 1,3 J pour franchir la barrière de potentiel.

Solution de l'exercice 10

1. $\dfrac{m}{2}\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} - (T + mg\sin\alpha)v.$
2. $v + v_0 \ln\dfrac{v_0 - v}{v_0} = -\dfrac{R}{m}t.$

Solution de l'exercice 11

1. Tracer simplement le graphique.
2. $z = 0$ position d'équilibre instable et $z = \pm a$ position d'équilibre stable.

Solution de l'exercice 12

1. Par définition

$$\begin{aligned} E_p(x) &= -\int \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int \left(\frac{a}{x^7} - \frac{b}{x^{13}}\right) dx \\ &= -\frac{a}{6x^6} + \frac{b}{12x^{12}} \end{aligned}$$

La constante d'intégration est nulle car l'énergie potentielle est nulle à l'infini.

2. Pour déterminer la position d'équilibre, on cherche un extremum de l'énergie potentielle ce qui est équivalent à chercher pour quelle valeur de x la force s'annule :

$$\frac{a}{l_{eq}^7} - \frac{b}{l_{eq}^{13}} = 0$$
$$l_{eq} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}$$

Pour déterminer la stabilité de cet équilibre, on calcule $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(l_{eq})$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(l_{eq}) &= \frac{-7a}{l_{eq}^8} + \frac{13b}{l_{eq}^{14}} \\ &= \frac{1}{l_eq^8}\left(-7a + \frac{13b}{l_{eq}^6}\right) \\ &= \frac{1}{l_eq^8}\left(-7a + 13a\right) > 0\end{aligned}$$

C'est donc un minimum de l'énergie potentielle, la position d'équilibre est stable.

3. Pour que la particule se retrouve à l'infinie avec au minimum une vitesse nulle, cela implique que $E_m \geqslant 0$ donc :

$$\frac{1}{2}mv_{0_{min}}^2 + E_p(l_{eq}) = 0 \Leftrightarrow v_{0_{min}} = \sqrt{\frac{a^2}{6mb}} \approx 9{,}1 \times 10^3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

4. Comme vu dans le cours :

$$E_p(l_{eq} + \epsilon) \approx E_p(l_{eq}) + \frac{\epsilon^2}{2} \times \frac{6a}{l_{eq}^8}.$$

5. De plus $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -F = -ma = -m\ddot{x}$, d'où

$$-m\ddot{\epsilon} = \epsilon \times \frac{6a}{l_{eq}^8}.$$

6. On trouve un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{6a}{ml_{eq}^8}} = \sqrt{\dfrac{6a^{7/3}b^{-4/3}}{m}}$.
7. La résolution donne $x(t) = l_{eq} + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$.
8. La fréquence des oscillations ets $f = \omega/(2\pi) \approx 7{,}8 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$.

Solution de l'exercice 13

$$f = \frac{m'h}{mh + (m+m')(D-h)}.$$

Solution de l'exercice 14

1. $m\ddot{x} = -2kx\left(1 - \dfrac{\ell_0}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$.

2. $x_0 = 0$ stable pour $\ell_0 < a$ instable sinon et $x_1 = \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ stables si elles existent.
3. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(1 - \dfrac{a^2}{\ell_0^2}\right)}$ pour $\ell_0 > a$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(1 - \dfrac{\ell_0}{a}\right)}$ pour $\ell_0 < a$.

III Équilibres acide-base

Solution de l'exercice 1

En faisant le bilan, on trouve :

$$CO_{2(g)} + 3\,H_2O + {Ca_{(aq)}}^{2+} \rightleftharpoons CaCO_{3(s)} + 2\,{H_3O_{(aq)}}^{+}.$$

Sa constante d'équilibre K s'écrit $K = K_1K_2K_3/K_s$.

Solution de l'exercice 2

1. À vous de chercher.
2. $pK_{a_1} = 3,1$; $pK_{a_2} = 4,8$; $pK_{a_3} = 6,4$

Solution de l'exercice 3

1. pH = 12
2. pH = 10,6
3. pH = 6,2
4. pH = 1,83
5. pH = 8,3

Solution de l'exercice 4

1. a) [H4SiO4] $= 2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{l}^{-1}$.
   b) $m_{\mathrm{SiO_2}} = 0,120$ g
2. a) Comportement d'un diacide
   b) $K_2' = 10^{1,8}$.
   c) $K_3' = 10^{3,2}$.

Solution de l'exercice 5

1. Solution jaune.
2. Solution bleue.
3. a) Utiliser les deux premières données pour calculer $\epsilon_{\mathrm{In^-}}\ell$ et $\epsilon_{\mathrm{HIn}}\ell$
   b) $pK_A = 7,16$

Solution de l'exercice 6

Avec le pH du sang donné dans l'énoncé, on se rend compte que l'espèce ${HCO_3}^-$ est prédominante, c'est donc elle qui réagit avec l'aicde lactique pour former le lactate :

$$\begin{array}{ccccccc} {HCO_3}^- & + & C_2H_5OH{-}COOH & \rightleftharpoons & H_2CO_3 & + & C_2H_5OH{-}COO^- \\ c_0 & & c_1 & & 0 & & 0 \\ c_0 - c_2 & & c_1 - c_2 & & c_2 & & c_2 \end{array}$$

Avec $c_0 = 0{,}0280\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ et $c_2 = 15\times 10^{-3}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. Le calcul du pH se fait avec

$$pH = pK_{A_1} + \log\left(\frac{[\mathrm{HCO_3}^-]}{[\mathrm{H_2CO_3}]}\right) \approx 6,3.$$

On ne survit noormalement pas à une épreuve de demi-fond, ce qui implique l'existence d'autres systèmes régulant le pH du sang.

Solution de l'exercice 7

1. a) $a = \frac{\rho_a\times V_a}{M_a} = 3{,}47\times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.
   b) $b = \frac{m_b}{M_b} = 4{,}88\times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.
   c) La solution de chlorure d'hydrogène est composée d'eau et de HCl :

$$m_T = m_{eau} + m_{\mathrm{HCl}}$$
$$m_{eau} = m_T - m_{\mathrm{HCl}}$$
$$m_{eau} = \rho_{cat}V_{cat} - C_{cat}V_{cat}M_{\mathrm{HCl}}$$

   D'où $c = \dfrac{V_{cat}}{M_c}(\rho_{cat} - C_{cat}M_{\mathrm{HCl}}) = 0{,}271\,\mathrm{mol}$.

2. a) On réalise simplement le tableau d'avancement de la réaction :

	CH_3COOH	$+\ C_2H_5OH$	$\rightleftharpoons CH_3COOC_2H_5$	$+\ H_2O$
t=0	a	b	0	c
t_{eq}	a−x	b−x	x	c+x

   b) On a $V_T = V_a + V_b + V_{cat}$ or $V_b = m_b/\rho_b$ d'où $V_T = 9{,}86\,\mathrm{mL}$.

3. a) i – Tout simplement :

$$\mathrm{H^+ + HO^- \rightleftharpoons H_2O}$$

   La constante $K_1 = 1/K_e = 10^{14}$

   ii – À l'équivalence, les réactifs sont en proportions stœchiométriques donc $C_{cat}V_{cat} = C_sV_1$ d'où $V_1 = \dfrac{C_{cat}V_{cat}}{C_s} = 5{,}00\,\mathrm{mL}$.

   b) i – C'est la réaction entre l'acide éthanoïque et la soude :

$$\mathrm{CH_3COOH + HO^- \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_2O}$$

   La constante $K_2 = K_a/K_e = 10^{9,25}$.

   ii – De même, à l'équivalence $n_{\mathrm{CH_3COOH}} = C_s(V_2 - V_1) = 2{,}16\times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.

   c) i – Il y a juste eu une dilution $C_1 = \frac{a}{V_1+V_T+50} = 0{,}535\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$.

   ii – On doit calculer le pH d'une solution d'acide éthanoïque à la concentration C_1 :

	CH_3COOH	$\rightleftharpoons CH_3COO^-$	$+\ H^+$
t=0	C_1	0	0
t_{eq}	$C_1 - \xi$	ξ	ξ

   Avec $K_a = \frac{\xi^2}{C_1-\xi}$, on trouve $\xi^2 + K_a\xi - C_1Ka = 0$ ce qui donne $\xi = 3{,}01\times 10^{-3}\,\mathrm{mol\cdot L^{-1}}$. On en déduit le $pH = -\log(\xi) = 2,51$.

d) i – On a $a - x = n_{CH_3COOH}$, d'où $x = a - n_{CH_3COOH} = 1{,}31 \times 10^{-2}\,\text{mol}$. On en déduit :

$$\begin{cases} n_{C_2H_5OH} & = b - x = 3{,}57 \times 10^{-2}\,\text{mol} \\ n_{CH_3COOC_2H_5} & = x = 1{,}31 \times 10^{-2}\,\text{mol} \\ n_{H_2O} & = c + x = 0{,}284\,\text{mol} \end{cases}$$

ii – On trouve alors :

$$K = \frac{x(c+x)}{(a-x)(b-x)} = 4,82.$$

Solution de l'exercice 8

1. $m_1 = 33{,}6\,\text{g}$.
2. $H_2PO_4{}^-$ et $HPO_4{}^{2-}$.
3. $K = 10^{6{,}8}$.
4. $[HPO_4{}^{2-}] = \dfrac{n_2}{V}$ et $[H_2PO_4{}^-] = \dfrac{n_1 - n_2}{V}$.
5. $pH = pK_{A_2} + \log\left(\dfrac{n_2}{n_1 - n_2}\right)$.
6. $m_2 = 0{,}36\,\text{g}$.