Corrigé

Plan de travail n° 5
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Régime sinusoïdal forcé

Solution de l'exercice 1

Pour une bobine $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, par passage en complexe on obtient $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$ d'où $Z_L = jL\omega$.

Pour un condensateur $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, par passage en complexe on obtient $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$ d'où $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.

Pour un résistor $u = Ri$, par passage en complexe on obtient $\underline{U} = R\underline{I}$ d'où $Z_R = R$.

Solution de l'exercice 2

Deux impédances en série s'ajoutent donc $Z_{eq} = R + jL\omega$

Pour une association parallèle, il faut ajouter les inverses : $\dfrac{1}{Z_{eq}} = jC\omega + \dfrac{1}{R}$ donc $Z_{eq} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$.

Solution de l'exercice 3

$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$ avec V et φ déterminées par l'utilisation de la méthode complexe. Cela donne :

$$jw\underline{V} + \frac{h}{m}\underline{V} + \frac{k}{m}\frac{\underline{V}}{j\omega} = \frac{F_0}{m}.$$

Finalement :

$$\underline{V} = \frac{F_0}{jm\omega + h + \frac{k}{j\omega}}.$$

On en déduit :

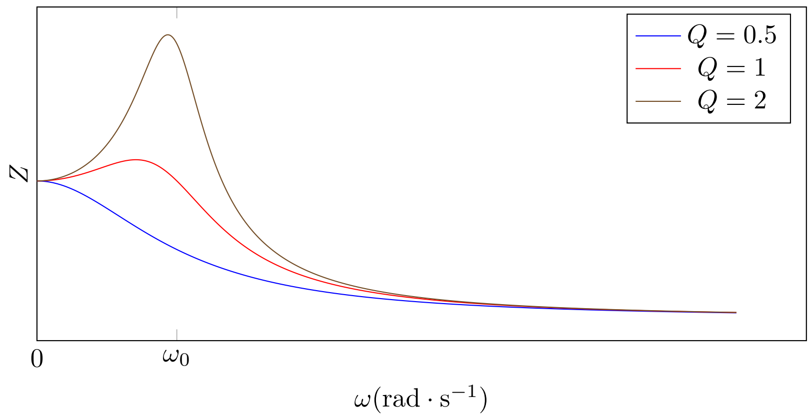
$$\begin{cases} V = |\underline{V}| = \frac{F_0}{\sqrt{h^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}} \varphi = \arg(\underline{V}) = -\arctan\left(\frac{m\omega - k/\omega}{h}\right) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 4

Le maximum d'amplitude de V est pour $\omega = \omega_0 = 20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. On peut estimer Q en prenant la pente de la tangente de $\varphi(\omega)$ en $\omega = \omega_0$ et on trouve $Q \approx 1$.

Solution de l'exercice 5

On trace Z pour différentes valeurs de Q :



Solution de l'exercice 6

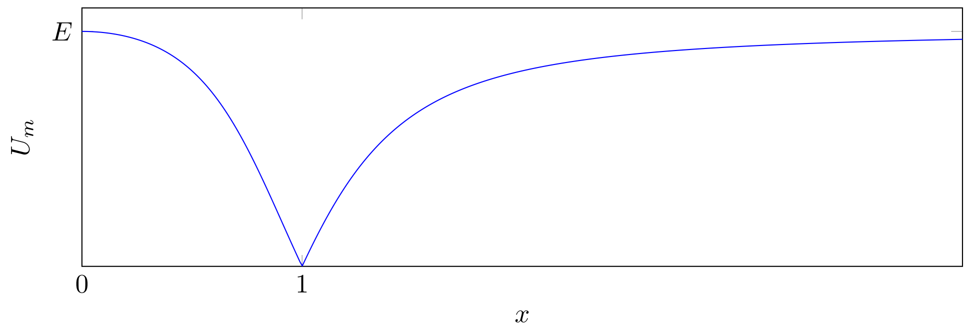
La largeur de la résonance Δw vérifie $Q = \omega_0/\Delta\omega$. Ici, $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\Delta\omega \approx 1000\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ donc $Q \approx 1$.

Solution de l'exercice 7

On obtient : $r = R/2 = 5\,\Omega$ et $C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{L\omega - 3\sqrt{3}/2R} = 12{,}1\,\mu\mathrm{F}$.

Solution de l'exercice 8

1. $\underline{U}_m = E \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$.
2. $U_m(x) = E \dfrac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$, U_m est nulle pour $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$:



Solution de l'exercice 9

1. Il suffit de mesurer la tension aux bornes de la résistance.
2. Dans un circuit RLC série, on montre que $I_{max} = E/R$ d'où $R \approx 100\,\Omega$.
3. La largeur de la courbe de résonance est telle que $Q = \omega_0/\Delta\omega$ d'où $C \approx 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$, $L \approx 0{,}1\,\mathrm{H}$ et $Q \approx 10$.

Solution de l'exercice 10

Le courant et la tension sont en phase si l'impédance équivalente du dipôle est un réel (partie imaginaire nulle) donc si $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (après calculs).

Solution de l'exercice 11

1. $x_e = \ell_0 - \dfrac{mg}{k}$.
2. $F(t) = \alpha \dot{x}_1(t) + k x_1(t)$.
3. a) $v_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{m}\right)^2}}$

   b) $\underline{H} = \dfrac{1+2jqp}{1-p^2+2jqp}$.

Solution de l'exercice 12

1. il suffit d'appliquer le PFD au gratte ciel :
$$m\vec{a} = -kx\vec{e}_x - \alpha\vec{v} + \vec{F}_e.$$
Ce qui donne :
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e\cos(\omega t)}{m}.$$
2. La pulsation propre s'écrit $\omega_0 = \sqrt{k/m} \approx 0{,}707\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $Q = m\omega_0/\alpha \approx 42,8$.
3. en passant en notation complexe, on obtient l'équation suivante :
$$-\omega^2\underline{X} + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_e}{m}.$$
En isolant $\underline{X}$, on trouve :
$$\underline{X} = \frac{F_e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}.$$
On peut alors déterminer l'amplitude des oscillations ainsi que le déphasage :
$$\begin{cases} X = |\underline{X}| = \frac{F_e/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \\ \varphi = \arg(\underline{X}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}\right) \end{cases}.$$
4. D'après la question précédente, $X(\omega_0) = \frac{QF_e}{m\omega_0^2} \approx 15\,\mathrm{cm}$ et $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$.
5. L'application du PFD au point M donne :
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m}\cos(\omega t) + \frac{m_1}{m}\omega_1^2 u.$$
L'application du PFD au point M_1 donne :
$$\ddot{x} + \ddot{u} = -\omega_1^2 u.$$
6. Le passage en notation complexe donne deux équations :
$$\begin{cases} \underline{X}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = \frac{F_e}{m} + \frac{m_1}{m}\omega_1^2\underline{U} \\ -\omega^2\underline{X} - \omega^2\underline{U} = -\omega_1^2\underline{U} \end{cases}$$

La seconde équation permet de déterminer l'expression de $\underline{U}$:

$$\underline{U} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

On remplace alors dans la première équation afin d'obtenir l'expression de $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \frac{F_e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \frac{\lambda\omega_1^2\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}}.$$

7. On en déduit $\underline{X}(\omega_0)$:

$$\underline{X}(\omega_0) = \frac{F_e/m}{\frac{\lambda\omega_0^2\omega_1^2}{\omega_0^2-\omega_1^2} + j\frac{\omega_0^2}{Q}}.$$

Ce qui donne :

$$X(\omega_0) = \frac{F_e/m}{\sqrt{\frac{\lambda^2\omega_0^4\omega_1^4}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2} + j\frac{\omega_0^4}{Q^2}}}.$$

8. Application numérique : $X(\omega_0) = 1{,}4\,\mathrm{cm}$.

II Dynamique newtonienne

Solution de l'exercice 1

Il y a trois forces qui s'exercent sur Mike, son poids, la force de tension du fil et la force de la cloture. En utilisant le fait que la masse de $m = 10\,\mathrm{kg}$ est immobile, on en déduit la norme de la tension du fil qui est de $T = mg = 98{,}1\,\mathrm{N}$. La projection verticale de la tension du fil doit compenser le poids de Mike qui est immobile d'ou $P = T\cos(30) \approx 85\,\mathrm{N}$.

Solution de l'exercice 2

Par définition $\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, en utilisant la définition de v_1 et v_2, on trouve :

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= m_1\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} \\
&= (m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} \\
&= (m_1+m_2)\vec{v}_G
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3

Le référentiel géocentrique est en tranlation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, alors que le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique.

Solution de l'exercice 4

Il suffit d'appliquer le PFD au systèle dans le référentiel terrestre supposé galiléen et cela donne $m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$ ce qui correspond bien à un mouvement à accélération constante.

Pour l'établissement des équations du mouvement, voir le cours.

Solution de l'exercice 5

Déterminons l'expression de la force exercée sur la balance, comme la balance a été taré avec le bécher rempli d'eau, il n'y a que l'effet du cylindre ajouté qui rentre en jeu.

Appliquons le PFD au cylindre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $\vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{R}=\vec{0}$, on trouve alors $\vec{R}=-\vec{P}-\vec{\Pi}$ qui s'écrit :

$$\vec{R}=\pi r^2 h(\rho-\rho_{eau})\vec{g}.$$

En utilisan le principe des actions réciproques, on trouve la force $\vec{F}$ exercée par le cylindre sur le bécher donc sur la balance (en utilisant une seconde fois le principe des actions réciproques) $\vec{F}=-\vec{R}=\pi r^2 h(\rho_{eau}-\rho)\vec{g}\approx 5{,}24\,\mathrm{N}$ ce qui donne une masse affichée de $524\,\mathrm{g}$.

Solution de l'exercice 6

Pour un corrigé, vous pouvez regarder votre cours.

Solution de l'exercice 7

L'équation différentielle obtenue est $\ddot{\theta}\frac{g}{l}\sin\theta=0$. La position d'équilibre est obtenue lorsque $\ddot{\theta}=0$ c'est-à-dire lorsque $\theta=\theta_e=0$. À proximité de la position d'équilibre, $\theta=\epsilon\ll 1$ et $\sin\theta\approx\theta$. L'équation différentielle devient alors $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$ qui est l'équation d'un oscillateur harmonique.

Solution de l'exercice 8

L'énergie mécanique du pendule simple s'écrit $E_m=\frac{1}{2}mv^2+mg\ell(1-cos(\theta))$ qui donne $E_m=\frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2+mg\ell(1-\cos(\theta)$. En posant $\omega_0^2=g/\ell$, le résultat devient $E_m=m\ell(\dot{\theta}^2+\omega_0^2(1-\cos(\theta)))$ qui est l'équation implicite des trajectoires de phase pour différentes valeurs de l'énergie mécanique.

Solution de l'exercice 9

1. $x=\ell_0+\dfrac{mg\sin\alpha}{k}$.
2. $x=x_e+D\cos\omega t$ avec $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Solution de l'exercice 10

1. a) item $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$, $y=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$ et $z=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.
   b) Pour α_1, $t=5$ s, $z=125$ m et $y=375$ m. Pour α_2, $t=8.7$ s, $z=375$ m et $y=375$m. Pour α_3, $t=10$ s, $z=500$ m et $y=0$ m.
   c) $z=\frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g}-\frac{g}{v_0^2}y^2\right)$
2. a) $\vec{v}=(\vec{v}_0-\vec{g}\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+\vec{g}\tau$
   b) $\overrightarrow{OM}=\tau(\vec{v}_0-\vec{g}\tau)\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)+\vec{g}\tau\cdot t$
   c) $z=94$ m et $y=289$ m.

Solution de l'exercice 11

1. $\omega=\sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$ et $\tau=\frac{2\pi}{\omega}$
2. a) $\omega_0^2=\frac{g}{a}$
   b) $T=\frac{mL}{2}(\omega^2+\omega_0^2)=36,6$ N et $T''=\frac{mL}{2}(\omega^2-\omega_0^2)=6,6$ N.

Solution de l'exercice 12

1. a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\alpha}{m}v=g$.
   b) $v(t)=g\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right)\lim\limits_{t\ll\tau}g\tau$.
   c) $x(t)=g\tau(t+\tau e^{-t/\tau})-g\tau^2$.

d) $\tau_1 = 8,2 \cdot 10^4$ s et $\tau_2 = 4500$ s. L'influence des frottements est négligeable.

2. a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{beta}{m} v^2 = g$ et $\left[\dfrac{mg}{\beta}\right] = [v]$.

   b) $v_l = sqrt\dfrac{mg}{\beta}$;

   c) v_l est la vitesse limite atteinte par la bille.

   d) $x(t) = \frac{v_l^2}{g} \ln\left(ch\left(\frac{gt}{v_l}\right)\right)$.

Solution de l'exercice 13

1. E : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{a}\sin\theta = 0$.
2. $\omega^2 = \dfrac{2g}{a}(1+\cos\theta)$ et $\theta_0 = 131,8\,^\circ$.
3. E' : $\ddot{\theta} - \dfrac{g}{a}\sin\theta = 0$.
4. $\omega^2 = \dfrac{2g}{a}(1-\cos\theta)$ et $\theta_0' = 48,2\,^\circ$.

Solution de l'exercice 14

1. Il suffit d'appliquer le PFD au morceau de verre dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :
$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}.$$
En projection selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ cela donne :
$$\left\{\begin{array}{l} R_n - P\cos(\alpha) = 0 \\ R_t - P\sin(\alpha) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} R_n = mg\cos(\alpha) \\ R_t = mg\sin(\alpha) \end{array}\right.$$
2. Le morceau de verre ne glisse pas si $R_t \leqslant \mu R_n$, en remplaçant avec les expressions de la question précédente, cela donne $\tan(\alpha) \leqslant \mu$.
3. Application numérique : $\mu \approx 0{,}7$.

Solution de l'exercice 15

1. Si on applique le principe fondamental de la dynamique à M dans $\mathcal{R}$ on obtient :
$$m\ddot{z} = -g.$$
On intègre et on trouve :
$$m\dot{z} = -gt + v_0.$$
On intègre de nouveau :
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0.$$
2. Quand l'altitude maximale est atteinte alors $\dot{z} = 0 \Leftrightarrow t_M = \dfrac{v_0}{g}$. On trouve alors :
$$z_M = z(t_M) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} + z_0 = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = v_0 t_M + z_0.$$

On calcule alors $z - z_M$:

$$\begin{aligned}
z - z_M &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 + \frac{1}{2}gt_M^2 + v_0 t_M - z_0 \\
&= \frac{1}{2}g(t_M^2 - t^2) + v_0(t - t_M) \\
&= \frac{1}{2}g(t_M^2 - t^2) + gt_M(t - t_M) \\
&= \frac{1}{2}g(t_M^2 - t^2 + 2t_M t - 2t_M^2) \\
&= -\frac{1}{2}g(t_M^2 + t^2 - 2t_M t) \\
&= -\frac{1}{2}g(t_M - t)^2
\end{aligned}$$

3. Soit t_1 le temps de premier passage passage à l'altitude z et t_2 le temps de second passage, on a par définition $T = t_2 - t_1$. De plus on a la relation :

$$z(t_1) - Z_M = z(t_2) - Z_M = -\frac{1}{2}g(t_M - t_1)^2 = -\frac{1}{2}g(t_M - t_2)^2.$$

Ainsi t_1 et t_2 sont solutions de l'équation :

$$\frac{2(z_M - z)}{g} = (t_M - t)^2.$$

Qu'on peut résoudre :

$$\begin{aligned}
(t_M - t)^2 &= \frac{2(z_M - z)}{g} \\
t_M - t &= \pm\sqrt{\frac{2(z_M - z)}{g}} \\
t &= t_M \pm \sqrt{\frac{2(z_M - z)}{g}}
\end{aligned}$$

On trouve alors $T = t_2 - t_1 = 2\sqrt{\frac{2(z_M - z)}{g}}$

4. On a deux équations :

$$\begin{cases} T_1 = 2\sqrt{\frac{2(z_M - z_1)}{g}} T_2 = 2\sqrt{\frac{2(z_M - z_2)}{g}} \end{cases}$$

On met au carré les deux équations puis on fait la différence en prenant en compte que $z_2 - z_1 = H$:

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{8H}{g}.$$

Et finalement :

$$g = \frac{8H}{T_1^2 - T_2^2}$$

5. On obtient :
$$g = \frac{8 \times 0,49}{0,70^2 - 0,30^2} = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Solution de l'exercice 16

1. Il faut dériver deux fois le vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$ d'où $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$. Or $V = ||\overrightarrow{v}|| = cte$ donc $\dot{\theta} = V/R = cte$ et $\ddot{\theta} = 0$.
Finalement $\overrightarrow{a} = \frac{-V^2}{R}\overrightarrow{u}_r$.
2. Commençons par le bilan des forces s'appliquant sur le bobsleigh :
$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z \\ \overrightarrow{N} = N\cos\beta\,\overrightarrow{u}_z - N\sin\beta\,\overrightarrow{u}_r \\ \overrightarrow{T} = -T\cos\beta\,\overrightarrow{u}_r - T\sin\beta\,\overrightarrow{u}_z \end{cases}$$
En appliquant le PFD au bobsleigh, on peut écrire $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$ d'où en projetant selon les trois directions du repère :
$$\begin{cases} -\frac{V^2}{R} = -N\sin\beta - T\cos\beta \\ 0 = 0 \\ 0 = -mg + N\cos\beta - T\sin\beta \end{cases}$$
C'est un système à deux équations, deux inconnues (N et T) donc la résolution donne :
$$\begin{cases} T = \frac{mV^2\cos\beta - mgR\sin\beta}{R} \\ N = \frac{mV^2\sin\beta + mgR\cos\beta}{R} \end{cases}$$
3. La réaction tangentielle s'annule si :
$$\begin{aligned} & mV_c^2\cos\beta - mgR\sin\beta = 0 \\ \Leftrightarrow & V_c^2 = gR\tan\beta \\ \Rightarrow & V_c = \sqrt{gR\tan\beta} \end{aligned}$$
L'application numérique donne $V_c \approx 10{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
4. Le bobsleigh ne dérapera pas tant que $T < fN$:
$$\begin{aligned} & \frac{mV^2\cos\beta - mgR\sin\beta}{R} < f\frac{mV^2\sin\beta + mgR\cos\beta}{R} \\ \Leftrightarrow & mV^2\cos\beta - mgR\sin\beta < f(mV^2\sin\beta + mgR\cos\beta) \\ \Leftrightarrow & V^2(\cos\beta - f\sin\beta) < gR(f\cos\beta + \sin\beta) \end{aligned}$$
Deuw cas se présentent suivant le signe de $\cos\beta - f\sin\beta$:
   1. si $\cos\beta - f\sin\beta > 0 \Leftrightarrow \beta < \arctan(1/f)$ alors :
   $$V^2 < gR\frac{f\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - f\sin\beta};$$
   2. si $\cos\beta - f\sin\beta < 0 \Leftrightarrow \beta > \arctan(1/f)$ alors :
   $$V^2 > gR\frac{f\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - f\sin\beta};$$

5. Dans le second cas, $V^2 > gR\frac{f\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-f\sin\beta} < 0$ et cette inégalité est donc toujours vérifiée, le bobsleigh ne pourra jamais déraper.
6. Dans le premier cas, $V^2 < gR\frac{f\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-f\sin\beta} = V_{max}$.
7. Application numérique : $\arctan(1/f) \approx 68{,}2\,^\circ > \beta$ donc le bobsleigh risque de déraper et $V_{max} \approx 17{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.