Corrigé

# Plan de travail n° 4 + lentilles
# Solutions et corrigés

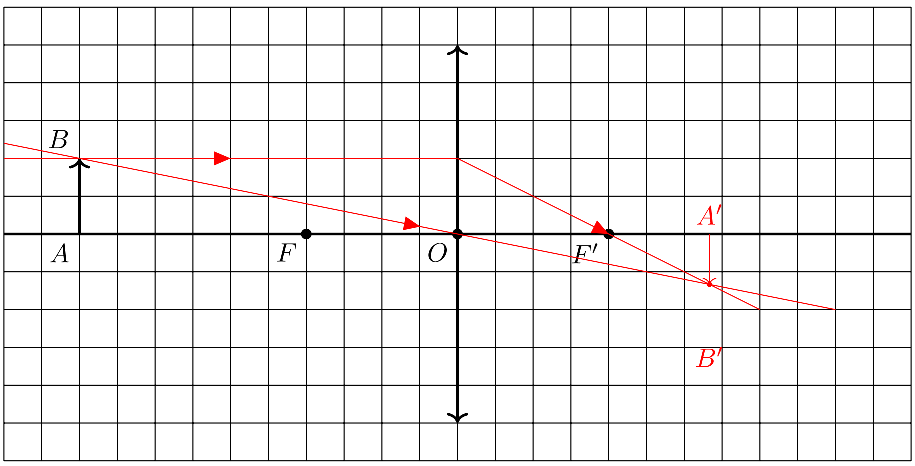
Sciences-physiques MPSI$_3$

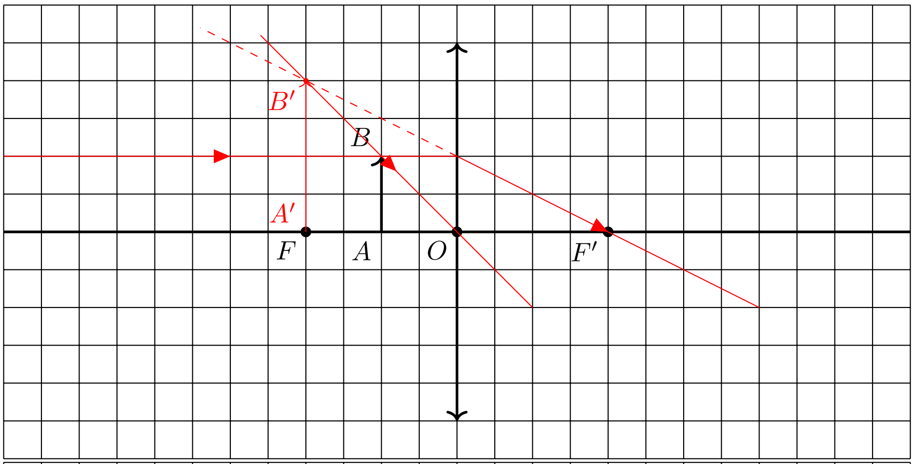
## I Les lentilles minces

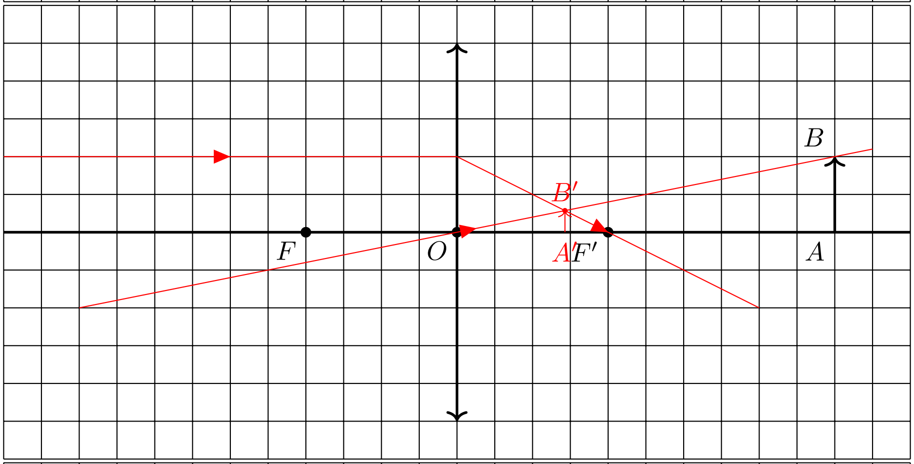
**Solution de l'exercice 1**

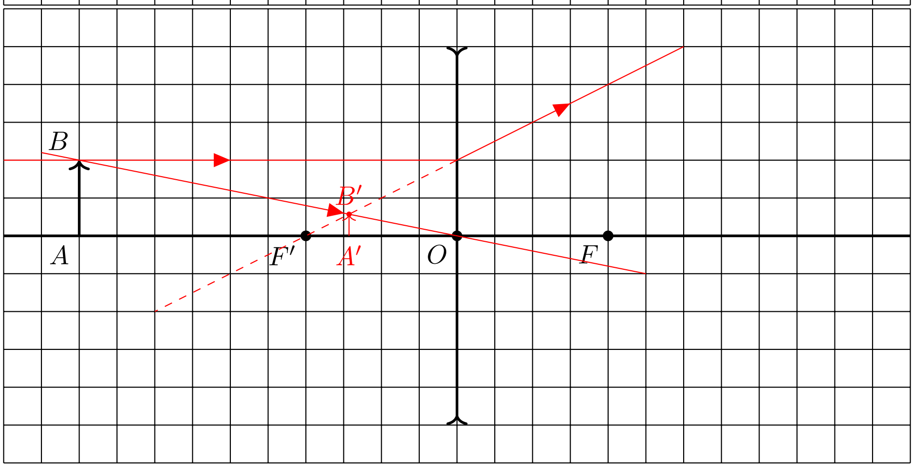
Un système optique possède la propriété de stigmatisme approché s'il est utilisé dans les conditions de Gauss. Si la taille des récepteurs du capteur est supérieure à l'image d'un point objet par un système optique alors le système optique est doté d'un stigmatisme approché.

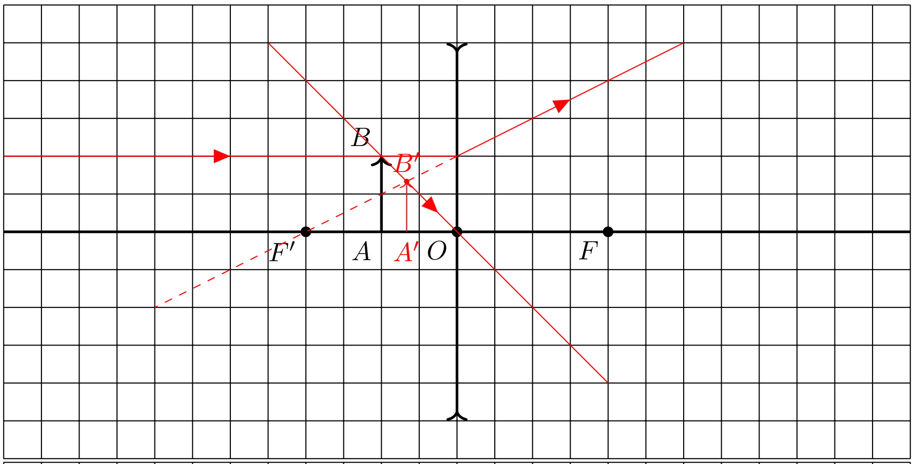
**Solution de l'exercice 2**

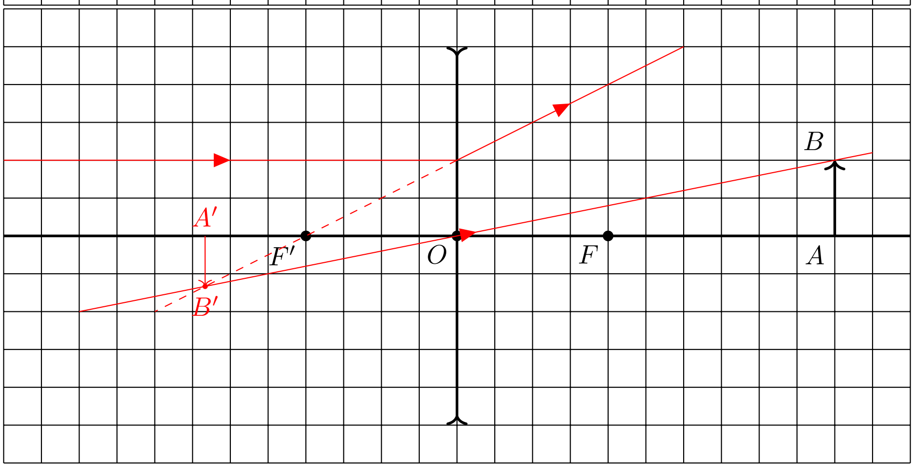



B′
B
A′
F
A
O
F′

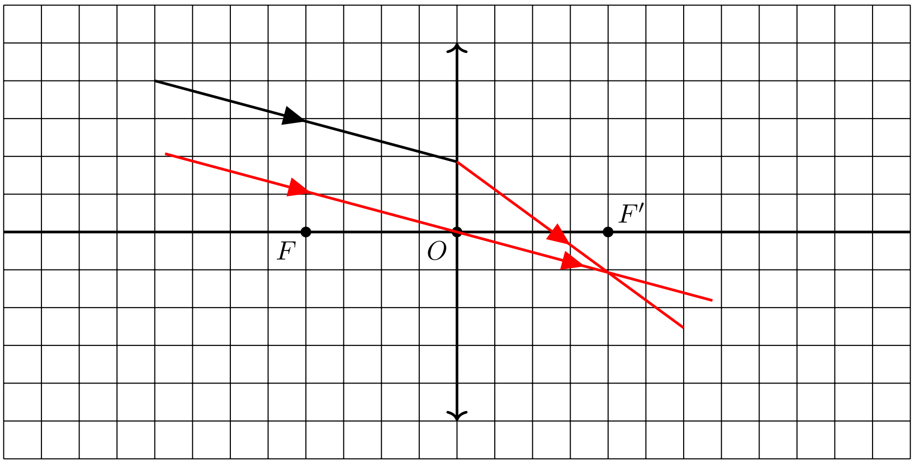

B
B′
F
O
A′
F′
A

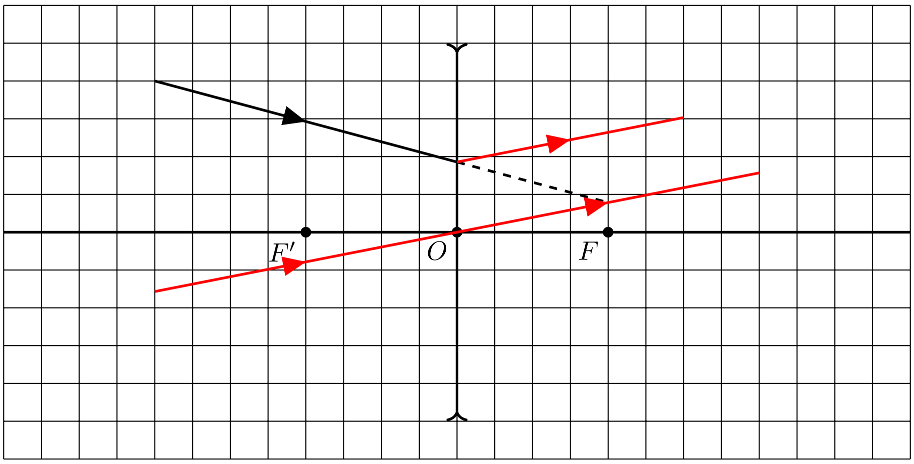

B
B′
A
F′
A′
O
F




**Solution de l'exercice 3**




**Solution de l'exercice 4**

Il suffit de tracer la marche d'un rayon lumineux faisant un angle $\neq 0$ avec l'axe optique et de trouver l'intersection de son émergent avec le plan focal image. Ce point d'intersection est le point image $B'$ du point objet $B$ par la lentille.

**Solution de l'exercice 5**

De manière générale :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{f' + \overline{OA}}.$$

Dans l'ordre pour la lentille convergente :

- $\overline{OA} = -50\,cm$, $\overline{OA'} = 33.3\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx -0,67$ et $\overline{AB} = -6.7\,\text{cm}$ ;
- $\overline{OA} = -10\,cm$, $\overline{OA'} = -20\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx 2$ et $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$ ;
- $\overline{OA} = 50\,cm$, $\overline{OA'} = 14.3\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx 0,29$ et $\overline{AB} = 2.9\,\text{cm}$ ;

Pour la lentille divergente :

- $\overline{OA} = -50\,cm$, $\overline{OA'} = -14.3\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx 0,29$ et $\overline{AB} = 2.9\,\text{cm}$ ;
- $\overline{OA} = -10\,cm$, $\overline{OA'} = -6.7\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx 0,67$ et $\overline{AB} = 6.7\,\text{cm}$ ;
- $\overline{OA} = 50\,cm$, $\overline{OA'} = -33.3\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx -0,67$ et $\overline{AB} = -6.7\,\text{cm}$ ;

**Solution de l'exercice 6**

Pour la lentille de focale $f' = 50\,\text{cm}$.

Si $\overline{OA} = -22\,\text{cm}$ alors $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}}$ d'où $\overline{OA'} \approx -39\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} \approx 6.6\,\text{cm}$.

Si $\overline{FA} = 2\,\text{cm}$ alors $\overline{F'A'} = -f'^2/\overline{FA} \approx -12.5\,\text{m}$ et $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = 92.5\,\text{cm}$. Pour la lentille de focale $f' = -10\,\text{cm}$.

Si $\overline{OA} = -22\,\text{cm}$ alors $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}}$ d'où $\overline{OA'} \approx -6.9\,\text{cm}$ et $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} \approx 1.16\,\text{cm}$.

Si $\overline{FA} = 2\,\text{cm}$ alors $\overline{F'A'} = -f'^2/\overline{FA} \approx -0.5\,\text{m}$ et $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = -18.5\,\text{cm}$.

**Solution de l'exercice 7**

On sait que $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$ or $\overline{AA'} = D = \overline{AO} + \overline{OA'}$ donc $\overline{OA'} = D + \overline{OA}$. En remplaçant dans la relation de conjugaison on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D + \overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow &f'(\overline{OA} - D - \overline{OA}) = \overline{OA}(D + \overline{OA}) \\ \Leftrightarrow &\overline{OA}^2 + D\overline{OA} + f'D = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet des solutions réelles si $\Delta = D^2 - 4f'D > 0$ donc si $D > 4f'$.

**Solution de l'exercice 8**

Dans l'œil humain c'est la distance cristallin-rétine qui est fixe, par contre la focale du cristallin peut varier.

**Solution de l'exercice 9**

Un œil humain normal peut voir des objets situés entre le *punctum proximum* $\approx 25\,\text{cm}$ et le *punctum remotum* à l'infini. La limite de résolution de l'œil humain est de 1' d'arc.

**Solution de l'exercice 10**

$$\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}.$$

**Solution de l'exercice 11**

1. $15,9 \text{ mm} \leq f' \leq 17 \text{ mm}$.
2. $f'_c = -5$ m.
3. $f'_c = 3$ m.

**Solution de l'exercice 12**

1. $\tan\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{d}$.
2. $f' < d$
3. $G_c = \dfrac{d}{f'} = 2,5$.
4. Faites le dessin.

# II Cinétique homogène

**Solution de l'exercice 1**

La vitesse :

- est multipliée par quatre ;
- ne change pas ;
- augmente.

**Solution de l'exercice 2**

La relation entre les grandeurs s'écrit : $v = v(\mathrm{HI})/2 = v(\mathrm{I_2}) = v(\mathrm{H_2})$.

**Solution de l'exercice 3**

La relation s'écrit $v = \dfrac{1}{\lambda(\mathrm{H_3O^+}) + \lambda(\mathrm{Cl^-})} \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$.

**Solution de l'exercice 4**

1. $v = k[\mathrm{CH_3COOC_2H_5}][\mathrm{HO^-}]$.
2. On trouve $k = 2.47 \times 10^{-3}\,\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}}$.
3. On trouve $k = 2.47 \times 10^{-3}\,\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}}$.

**Solution de l'exercice 5**

On trouve le tableau suivant en utilisant la relation suivante : $v \approx \dfrac{1}{2RT}\dfrac{\Delta P}{\Delta t}$ :

| $t$(s) | 0 | 30 | 60 | 120 | 180 | 240 | 320 | 400 | 500 | 600 | 700 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}})$ | 0.150 | 0.134 | 0.120 | 0.096 | 0.077 | 0.061 | 0.046 | 0.034 | 0.023 | 0.016 | 0.011 |

**Solution de l'exercice 6**

1. En traçant $\ln(v)$ en fonction de $\ln([\mathrm{A}])$, on obtient une droite de pente 3/2 qui est égale à l'ordre par rapport à A.

2. $t_{1/2}$ n'est pas constant, la réaction n'est donc pas d'ordre 1. Le tracé de $1/[A]_0$ en fonction de $t_{1/2}$ donne un droite, cela permet de conclure pour un ordre égal à 2 par rapport à A.

**Solution de l'exercice 7**

1. Il suffit de tracer $1/[A] = 1/([A]_0 - [C]/2)$ en fonction du temps et de vérifier qu'on obtient une droite.
2. Il suffit de tracer $\ln([C]/[C]_0)$ en fonction du temps et de vérifier qu'on obtient une droite.

**Solution de l'exercice 8**

$E_a = 89\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$.

**Solution de l'exercice 9**

1. c.f. cours
2. $k_1 = 0.37\,\mathrm{s^{-1}}$
3. $\tau_{1/2} = 1.9\,\mathrm{s}$.
4. $\theta = 449\,\mathrm{K}$.

**Solution de l'exercice 10**

$k = 0,03\ \mathrm{L^{1/2}{\cdot}mol^{-1/2}{\cdot}min^{-1}}$.

**Solution de l'exercice 11**

La datation au carbone 14 donne un age pour la sandale d'environ 2900 ans, ce qui fait un écart de 500 ans avec le règne d'Hatschepsout.

**Solution de l'exercice 12**

1. $H_2O_2 + 2\,H_3O^+ + 2\,I^- \longrightarrow 4\,H_2O + I_2$, et cette réaction est lente.
2. $2\,S_2O_3{}^{2-} + I_2 \longrightarrow S_4O_6{}^{2-} + 2\,I^-$, réaction quasi-instantanée.
3. Le diode est formé lentement et il disparaît rapidement. Ainsi il faudra un certain temps avant que tout le thiosulfate ne soit consommé et que le diiode s'accumule dans le milieu réactionnel provoquant l'apparition de la couleur beue.
4. $[I^-]$ est constante.
5. Tracé de $\ln n_{H_2O_2} = f(t)$.

**Solution de l'exercice 13**

1. $2\,Fe^{3+} + 2\,I^- \longrightarrow 2\,Fe^{2+} + I_2$
2. La dilution diminue la vitesse de réaction.
3. $n = 1,99$ et $m = 1$, $k_3 = 8,4$ $(\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-2}\,min^{-1}})$

**Solution de l'exercice 14**

1. Dans le cas où $\alpha = 1$, on peut écrire :

$$v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = k\left(\frac{n_{O_3}}{V}\right).$$

   En réalisant le tableau d'avancement, on trouve facilement la relation entre $\xi$ et $n_{O_3}$ : $n_{O_3} = n_0 - \xi$ avec $n_0$ le nombre de mole initial en ozone. On en déduit :

$$v = -\frac{\mathrm{d}[O_3]}{\mathrm{d}t} = k[O_3].$$

L'équation différentielle régissant l'évolution de la concentration en $O_3$ s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}[O_3]}{\mathrm{d}t} + k[O_3] = 0.$$

La solution en est :

$$[O_3] = c_0 \exp(-kt).$$

Avec $c_0$ la concentration initiale en ozone.
Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est donné par :

$$\frac{c_0}{2} = c_0 \exp(-kt_{1/2})$$
$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$$

2. Dans le cas où $\alpha = 2$, un raisonnement identique consuit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}[O_3]}{\mathrm{d}t} + k[O_3]^2 = 0.$$

La résolution utilise la méthode de séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}[O_3]}{[O_3]^2} = -k\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{[O_3]} = -kt + cte$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$\frac{1}{[O_3]} - \frac{1}{c_0} = kt.$$

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est donné par :

$$\frac{2}{c_0} - \frac{1}{c_0} = kt_{1/2}$$
$$\Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{1}{kc_0}$$

3. Dans le cas où $\alpha = 3$, un raisonnement identique conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}[O_3]}{\mathrm{d}t} + k[O_3]^3 = 0.$$

La résolution utilise la méthode de séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}[O_3]}{[O_3]^3} = -k\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2[O_3]^2} = -kt + cte$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$\frac{1}{2[O_3]^2} - \frac{1}{2c_0^2} = kt.$$

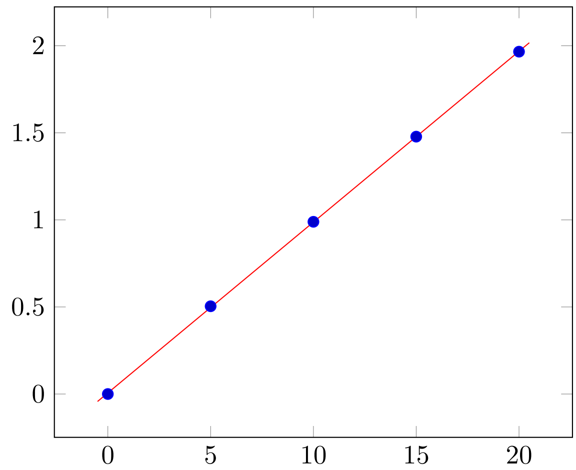
Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{2}{c_0^2} - \frac{1}{2c_0^2} &= kt_{1/2} \\ \Leftrightarrow t_{1/2} &= \frac{3}{2kc_0^2}\end{aligned}$$

4. On remarque que le temps pour que pour toutes les manipulations, le temps pour que la concentration initiale soit divisé par deux est toujours le même, soit environ 7 min à 7 min30 s. Un temps de demi-réaction indépendant des conditions initiles est caractéristique d'une réaction d'ordre 1. On suppose donc que $\alpha = 1$.
5. D'après la première question, on sait que si $\alpha = 1$ alors $[O_3] = c_0 \exp(-kt)$. Dans ce cas :

$$\ln\left(\frac{c_0}{[O_3]}\right) = kt.$$

Ainsi, si $\alpha = 1$ le tracé de $\ln\left(\frac{c_0}{[O_3]}\right)$ doit donner une droite de pente $k$. Le tracé est fait ci dessous :




Sur ce graphique est tracé la droite de régression dont la pente est $k = 0.0981\,\mathrm{min}^{-1}$.
6. Les temps de demi réaction est alors :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = 7.06\,\mathrm{min} = 7\,\mathrm{min}4\,\mathrm{s}.$$

7. On dispose du système de deux équations :

$$\begin{cases} k_1 &= A\exp(-E_a/(RT_1)) \\ k_2 &= A\exp(-E_a/(RT_2)) \end{cases}$$

En divisant les deux équation et en passant au logarithme, on obtient :

$$E_a \left( \frac{1}{RT_2} - \frac{1}{RT_1} \right) = \ln \left( \frac{k_1}{k_2} \right).$$

Ce qui donne finalement :

$$E_a = \frac{R}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \approx 44.8\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}.$$

**Solution de l'exercice 15**

1. a) D'après la loi d'ordre : $v = k[\mathrm{Cu(dien)}^{2+}]^{\alpha}[\mathrm{Y}^{4-}]^{\beta}$.
   b) Comme $[\mathrm{Y}^{4-}]_0 = 30[\mathrm{Cu(dien)}^{2+}]_0$, on peut appliquer la méthode de la dégénerscence de l'ordre et supposer que la concentration en $\mathrm{Y}^{4-}$ est cnstante d'où : $v = k_{app}[\mathrm{Cu(dien)}^{2+}]^{\alpha}$ avec $k_{app} = k[\mathrm{Y}^{4-}]_0^{\beta}$.
   c) Méthode classique d'intégration qui donne :
      - pour l'ordre 0 : $C - C_0 = -k_{app}t$ et $r = -0,9839$ ;
      - pour l'ordre 1 : $\ln(C/C_0) = -k_{app}t$ et $r = -0,9998$ ;
      - pour l'ordre 2 : $\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = k_{app}t$ et $r = 0,9818$ ;
      - pour l'ordre 3 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{C_0^2} = k_{app}t$ et $r = 0,9388$ .

      Le meilleur cœfficient de corrélation est pour l'ordre $\alpha = 1$.
   d) $k_{app}$ est donné par la pente de la droite de régression : $k_{app} = 0.0311\,\mathrm{s^{-1}}$ on en déduit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{app}} \approx 22.3\,\mathrm{s}$
2. Comme $k_{app} = k[\mathrm{Y}^{4-}]_0^{\beta}$, on a $\ln k_{app} = \ln k + \beta \ln([\mathrm{Y}^{4-}]_0)$. Le tracé de $\ln k_{app}$ en fonction de $\ln([\mathrm{Y}^{4-}]_0)$ donne donc une droite de pente $\beta$. La régression linéaire donne $\beta = 1$ avec $r = 0,9997$.
3. a) $[\mathrm{Y}^{4-}]_0 = [\mathrm{H_2Y}^{2-}] + [\mathrm{HY}^{3-}]$, avec $K_{a3} = [\mathrm{HY}^{3-}]h/[\mathrm{H_2Y}^{2-}]$, on trouve :

$$\begin{cases} [\mathrm{HY}^{3-}] = \frac{K_{a3}[\mathrm{Y}^{4-}]_0}{K_{a3}+h} \\ [\mathrm{H_2Y}^{2-}] = \frac{h[\mathrm{Y}^{4-}]_0}{K_{a3}+h} \end{cases}$$

   b) i – $k_{app} = \dfrac{k_2 h + k_1 K_{a3}}{K_{a3} + h}[\mathrm{Y}^{4-}]_0$.

      ii – Au maximum, $pH = 4,9$ donc $h = 10^{-4,9}$ d'où $K_{a3}/h = 5 \times 10^{-2}$ c'est-à-dire $h = 20K_{a3}$ au minimum. On en déduit : $k_{app} \approx k_2[\mathrm{Y}^{4-}]_0 + \dfrac{k_1 K_{a3}[\mathrm{Y}^{4-}]_0}{h}$.

      iii – Le tracé de $k_{app}$ en fonction de $1/h$ donne une droite de pente $k_1 K_{a3}[\mathrm{Y}^{4-}]_0$ et d'ordonnée à l'origine $k_2[\mathrm{Y}^{4-}]_0$. La régression linéaire donne :

$$\begin{cases} A = 4.39 \times 10^{-3} \\ B = 1.28 \times 10^{-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = 0.439\,\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}} \\ k_1 = 20.25\,\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}} \end{cases}$$

      iv – Comme $k_1 > k_2$, on en déduit que $\mathrm{HY}^{3-}$ est plus réactif que $\mathrm{H_2Y}^{2-}$. $\mathrm{Cu(dien)}^{2+}$ réagit donc vec l'espèce la plus chargée à ce pH de 4.

**Solution de l'exercice 16**

1. On utilise la relation d'ordre pour $v$ :

$$v = k \cdot [\mathrm{BrO_3}^-]^a \cdot [\mathrm{Br}^-]^b \cdot [\mathrm{H_3O}^+]^c.$$

2. On est dans le cas où : $[\mathrm{BrO_3}^-]_0 \ll [\mathrm{Br}^-]_0$ et $[\mathrm{BrO_3}^-]_0 \ll [\mathrm{H_3O}^+]_0$, on utilise alors la technique de la dégénérescence de l'ordre et par la suite on peut considérer que :

$$\begin{cases} [\mathrm{Br}^-] \approx [\mathrm{Br}^-]_0 \\ [\mathrm{H_3O}^+] \approx [\mathrm{H_3O}^+]_0 \end{cases}$$

   La vitesse peut alors s'écrire :

$$v = k'[\mathrm{BrO_3}^-]^a.$$

   Avec $k' = k \cdot [\mathrm{Br}^-]_0^b \cdot [\mathrm{H_3O}^+]_0^c$.

3. le temps de demi-réaction est le temps au bout duquel :

$$[\mathrm{BrO_3}^-] = \frac{[\mathrm{BrO_3}^-]_0}{2}.$$

   Graphiquement on trouve approximativement :

$$t_{1/2} \approx 1900 \text{ s};$$

4. On retrouve facilement (revoir votre cours si ce n'est pas le cas) :

$$[\mathrm{BrO_3}^-] = [\mathrm{BrO_3}^-]_0 \exp(-k't) \text{ si } a = 1$$
$$\frac{1}{[\mathrm{BrO_3}^-]} - \frac{1}{[\mathrm{BrO_3}^-]_0} = k't \text{ si } a = 2.$$

5. La courbe $\ln([\mathrm{BrO_3}^-]) = f(t)$ est une droite et cela correspond à $a = 1$. L'ordre partiel par rapport aux ions bromates est donc égal à 1.
6. On sait que $v_0 = k \cdot [\mathrm{BrO_3}^-]_0 \cdot [\mathrm{Br}^-]_0^b \cdot [\mathrm{H_3O}^+]_0^c$.
   Dans l'expérience N ˚ 2, la concentration initiale en ions bromure est multipliée par 1,5 par rapport à l'expérience N ˚ 1, la concentration initiale en ions oxonium restant égale. On remarque alors que la vitesse initiale est multipliée par 1,5. Cela indique que l'ordre partiel par rapport aux ions bromures est égal à 1.
   Dans l'expérience N ˚ 3, la concentration initiale en ions oxonium est multipliée par 2 par rapport à l'expérience N ˚ 1, la concentration initiale en ions bromure restant égale. On remarque alors que la vitesse initiale est multipliée par 4. Cela indique que l'ordre partiel par rapport aux ions oxonium est égal à 2.
7. On peut déterminer $k'$ comme étant l'opposée de la pente de la droite $\ln([\mathrm{BrO_3}^-]) = f(t)$ dans la figure **??**. On sait que $k' = k \cdot [\mathrm{Br}^-]_0 \cdot [\mathrm{H_3O}^+]_0^2$, d'où finalement :

$$k = \frac{k'}{[\mathrm{Br}^-]_0 \cdot [\mathrm{H_3O}^+]_0^2} = \frac{3,7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-1} \times 10^{-2}} \approx 41 \text{ L}^3\cdot\text{mol}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}.$$

# III L'oscillateur harmonique amorti

**Solution de l'exercice 1**

La courbe 1 et la courbe 4 représentent un régime pseudo-périodique, la courbe 2 un régime apériodique et la courbe 3 un régime critique (ou un régime apériodique très proche du régime critique).

**Solution de l'exercice 2**

Le condensateur commence par se décharger et un courant $i$ circule dans le circuit. La bobine stocke alors une certaine quantité d'énergie mais une partie de l'énergie initiale du condensateur a été dissipée par effet Joule. Ensuite la bobine libère l'énergie stockée qui permet au condensateur de se charger et une partie de l'énergie est encore dissipée par effet Joule. Cela continue jusqu'à ce que l'énergie disponible soit entièrement dissipée par effet Joule.

Si l'énergie dissipée par effet Joule est très importante alors le condensateur ne se recharge pas et on obtient un régime apériodique.

Si la résistance est nulle alors il n'y a pas de pertes énergétiques et l'énergie est échangée entre le condensateur et la bobine, on tombe sur un régime périodique.

**Solution de l'exercice 3**

Pour la courbe 1 : $X(0) \approx 2$ et $\dot{X}(0) \approx 1000$ alors que pour la courbe 2, $X(0) \approx 1$ et $\dot{X}(0) \approx 0$. Dans les deux cas en régime permanent, $X(0) \approx 0$ et $\dot{X}(0) \approx 0$

**Solution de l'exercice 4**

La pulsation propre est telle que $\omega_0 = \sqrt{10000} = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ puis $Q = \omega_0/20 = 5$.

**Solution de l'exercice 5**

D'après ce qui a été vu en cours :

- régime apériodique $Q < 1/2$ ;
- un régime critique $Q = 1/2$ ;
- un régime pseudo-périodique $Q > 1/2$.

**Solution de l'exercice 6**

Voir la résolution donnée en cours, il ne reste qu'à déterminer les constantes d'intégration :

**Régime apériodique :** $X(t) = (x_0 - X_e)\left(\dfrac{r_2}{r_2 - r_1}\exp(r_1 t) + \dfrac{r_1}{r_1 - r_2}\exp(r_2 t)\right) + X_e.$

**Régime critique :** $X(t) = (x_0 - X_e)\left(1 + \dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right) + X_e.$

**Régime pseudo-périodique :** $X(t) = (x_0 - X_e)\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos(\omega t) + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin(\omega t)\right) + X_e.$

**Solution de l'exercice 7**

Pour la première équation différentielle, le facteur de qualité vaut $Q = 10$. Le régime est donc pseudo-périodique et sa durée est $5\tau = 10Q/\omega_0 = 0.1\,\mathrm{s}$.

Pour la première équation différentielle, le facteur de qualité vaut $Q = 1/4$. Le régime est donc apériodique et sa durée est $5\tau = \dfrac{5}{\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} = 0.19\,\mathrm{s}$.

**Solution de l'exercice 8**

La solution de l'oscillateur harmonique s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Ainsi $\dot{x}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Il est possible d'éliminer le temps pour obtenir la relation entre $x$ et $\dot{x}$ en utilisant le fait que $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ ce qui donne :

$$\left(\frac{x}{C}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{C\omega_0}\right)^2 = 1.$$

Le tracé de cette courbe donne une ellipse.

**Solution de l'exercice 9**

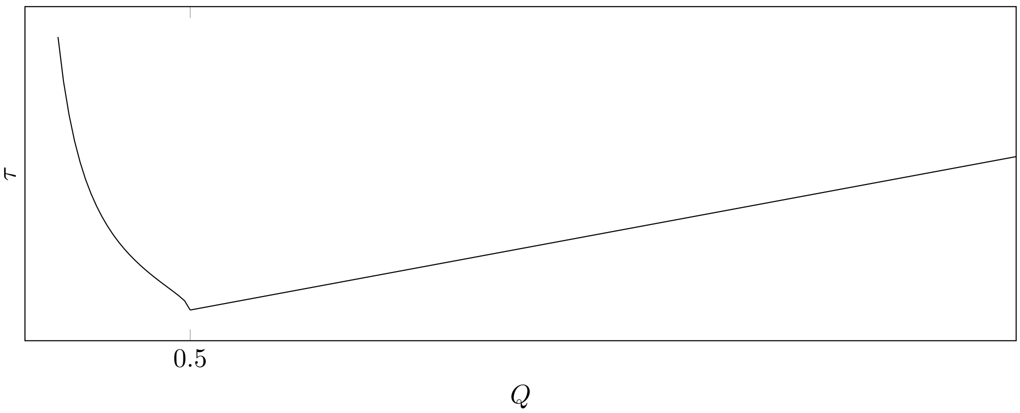
Deux positions d'équilibre dont celle de gauche stable et celle de droite instable.

**Solution de l'exercice 10**

En reprenant la méthode vue en cours, on trouve :

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} \text{ si } Q < 1/2 \\ \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ si } Q > 1/2 \end{cases}$$

La conclusion qu'on peut en tirer est que le régime critique est celui qui a le retour à l'équilibre le plus rapide. Le tracé est ci-dessous :




**Solution de l'exercice 11**

1. $u(0) = 0$ et $\dfrac{du}{dt}(0) = \dfrac{E}{RC}$.
2. $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}$. En notant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = RC\omega_0$, $\Delta$ le discriminant de l'équation caractéristique et $r_1$ et $r_2$ les solutions de l'équation caractéristique, on trouve :

$$\begin{cases} u(t) = E + \frac{E}{r_1 - r_2}\left(\left(\frac{\omega_0}{Q} + r_2\right)e^{r_1 t} - \left(\frac{\omega_0}{Q} + r_1\right)e^{r_2 t}\right) \text{ en régime apériodique} \\ u(t) = E + E\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(-\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin(\omega t)\right) \text{ en régime pseudo-périodique.} \end{cases}$$

**Solution de l'exercice 12**

1. $m\ddot{Z} + h\dot{Z} + kZ = 0$

2. En utilisant la forme canonique de l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{cases} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi &= \frac{h}{2\sqrt{mk}}. \end{cases}$$

3. $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.
4. On obtient les valeurs suivantes pour le décrément logarithmique :

$$0,38,\ 0,33,\ 0,34,\ 0,33,\ 0,32.$$

5. Mis à part la première valeur, le modèle de l'oscillateur harmonique amorti est valide pour cette expérience.
6. On obtient :

$$\begin{cases} \xi &= 0,048 \\ T &= 0.95\,\mathrm{s} \end{cases}$$

7. On en déduit :

$$\begin{cases} m &= 230\,\mathrm{g} \\ h &= 0.15\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \end{cases}$$

**Solution de l'exercice 13**

1. a) On écrit l'équation de maille :

$$E = Ri + \frac{q}{C}.$$

Or le condensateur se charge donc $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. D'où :

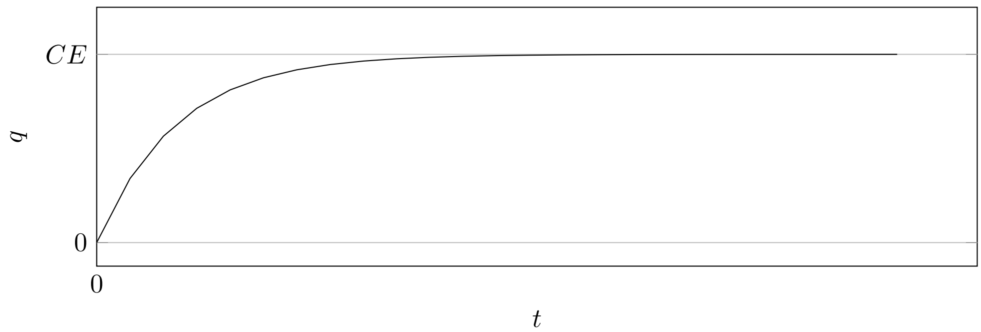
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}.$$

La résolution donne facilement :

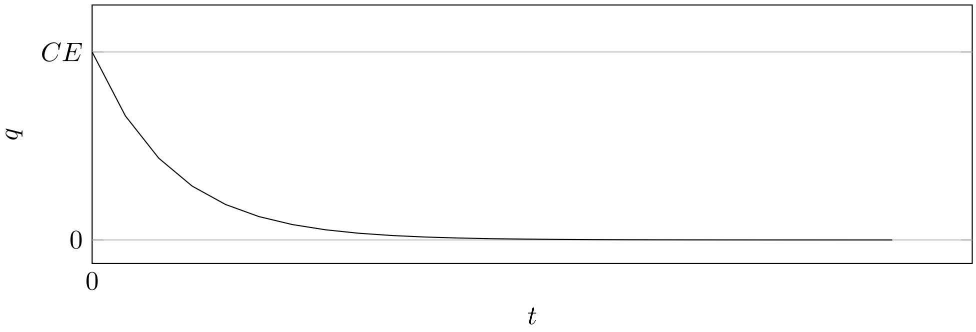
$$q(t) = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

avec $\tau = RC$.

b) Le tracé est donné sur le graphique suivant :

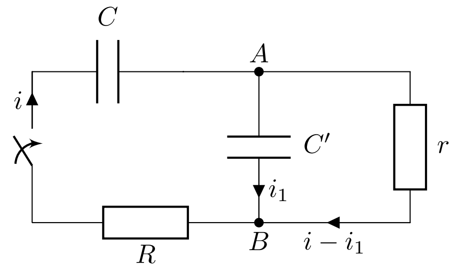


c) Le tracé de la décharge est donnée sur la graphique suivant en supposant que le régime permanent a été atteint avant de commencer la décharge.




d) Pour obtenir une charge et une décharge rapide il faut que $\tau = RC$ soit relativement faible. approximativement il faut un temps égal à $5\tau$ pour atteindre le régime permanent.

2. a) Notons les courants circulant dans le circuit :




On sait que :

- $i = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ;
- $i_1 = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C'\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$.

Écrivons 2 équations de maille faisant intervenir $U$ :

$$\frac{Q}{C} + U + Ri = 0$$
$$U = r(i - i_1).$$

La seconde équation nous donne l'expression de $i$ :

$$i = i_1 + \frac{U}{r} = C'\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{U}{r}.$$

On dérive la première pour ne laisser que $U$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + RC'\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{C'}{C}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{rC}U + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + RC'\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0
\end{aligned}$$

On peut finalement écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{1}{rC'} + \frac{1}{RC'} + \frac{1}{RC}\right) + \frac{1}{RrCC'}U = 0.$$

b) On pose :

- $\omega_0^2 = \dfrac{1}{RrCC'}$ ;
- $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{rC'} + \dfrac{1}{RC'} + \dfrac{1}{RC}$.

Pour avoir un régime sans oscillations (régime apériodique) , il faut que $Q < \dfrac{1}{2}$, soit :

$$\frac{\sqrt{RrCC'}}{RC + rC'} < \frac{1}{2}.$$

c) On doit trouver les solutions de l'équation caractéristique :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 > 0$ donc les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 & = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0; \\ x_2 & = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0; \end{cases}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$U(t) = A\exp(x_1 \cdot t) + B\exp(x_2 \cdot t).$$

Il faut maintenant avoir les conditions initiales pour déterminer $A$ et $B$. on sait que la tension aux bornes d'un condensateur varie de manière continue, donc la tension initiale $U(0) = 0$ car le condensateur de-capacité $C'$ est déchargé initialement.
Reste à trouver la condition initiale sur $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i_1}{C'}$. D'après la seconde équation de maille prise à $t = 0$ on a :

$$i_1(0) = i(0) - \frac{U(0)}{r} = i(0).$$

De plus la première équation de maille permet de déterminer $i(0)$ :

$$i(0) = -\frac{U(0) - \frac{Q(0)}{C}}{R} = \frac{Q_0}{RC}.$$

Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{Q_0}{RCC'}.$$

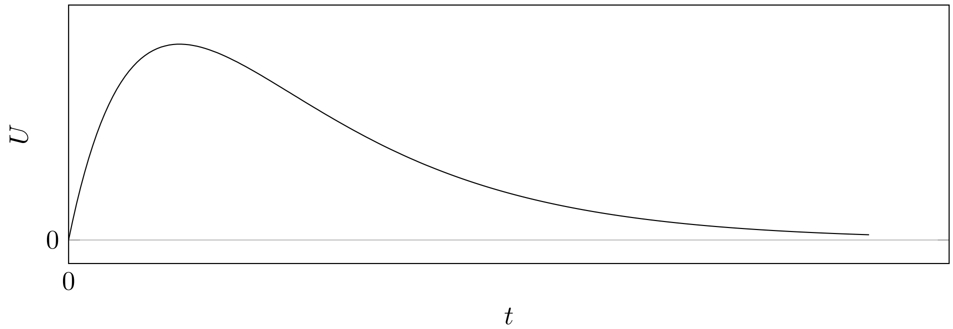
D'où :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ax_1 + Bx_2 = -\frac{Q_0}{RCC'} \end{cases}$$

Ce qui donne après calculs :

$$A = -B = \frac{Q_0}{RCC'(x_2 - x_1)}.$$

Le tracé de $U(t)$ a alors l'allure suivante :




# IV La cinématique newtonienne

**Solution de l'exercice 1**

Dans le premier repère :

- $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ ;
- $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ ;
- $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$.

Dans le second repère :

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ ;
- $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ ;
- $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$.

**Solution de l'exercice 2**

Le vecteur déplacement élémentaire d'écrit $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z$ en coordonnées cartésiennes. On en déduit simplement le vecteur vitesse :

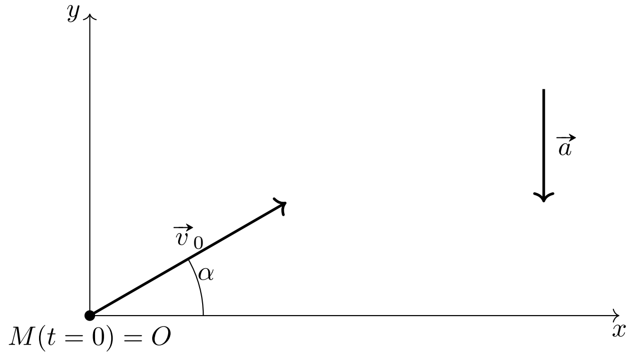
$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_z.$$

Le vecteur déplacement élémentaire d'écrit $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + dz\overrightarrow{e}_z$ en coordonnées cartésiennes. On en déduit simplement le vecteur vitesse :

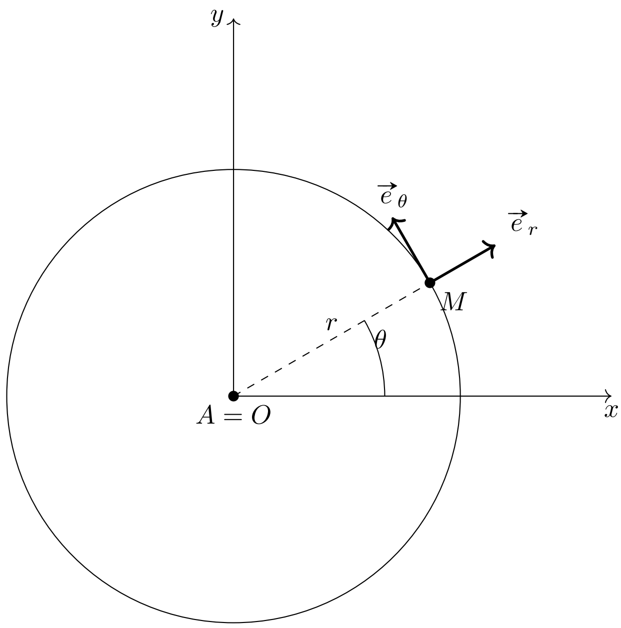
$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_x + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e}_z.$$

**Solution de l'exercice 3**

1. On peut prendre le repère suivant par exemple :




2. On peut prendre le repère suivant par exemple :




**Solution de l'exercice 4**

En prenant le paramétrage choisi dans la solution de l'exercice **??**, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0\sin(\alpha)t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne en éliminant $t$ entre les deux équations :

$$y = -\frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + x\tan(\alpha).$$

**Solution de l'exercice 5**

Le vecteur position s'écrit simplement $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ avec $R$ le rayon de la trajectoire circulaire. Le vecteur vitesse s'en déduit en dérivant par rapport au temps : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. De même, le vecteur accélération s'en déduit : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Dans le cas particulier d'un mouvement uniforme, le vecteur position et le vecteur vitesse ne sont pas modifiés mais $\dot{\theta} = cte$ dont $\ddot{\theta} = 0$ d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

**Solution de l'exercice 6**

1. $R = |v^2/a_r| \approx 0.71\,\mathrm{m}$ et comme $a_\theta = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$, la vitesse va augmenter.
2. La concavité de la trajectoire doit être située vers le point $O$.

**Solution de l'exercice 7**

Un ballon de football est déformable alors qu'une boule de billard ne l'est pas. La boule de billard peut-être considérée comme un solide.

**Solution de l'exercice 8**

Pour le premier c'est une translation rectiligne et pour le second une rotation.

**Solution de l'exercice 9**

Tout simplement $v = r\omega$.

**Solution de l'exercice 10**

On trouve $t_{min} = 26,5s$.

**Solution de l'exercice 11**

1. $\omega = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et $v = 29.8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.
2. $a = 5.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

**Solution de l'exercice 12**

1. $\vec{v} = -v_0\cos\alpha\,\vec{u}_r + v_0\sin\alpha\,\vec{u}_\theta$.
2. $\vec{a} = -\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{r_0 - v_0\cos\alpha t}\vec{u}_r - \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{r_0 - v_0\cos\alpha t}\vec{u}_\theta$.
3. $\theta = -\tan\alpha\ln\dfrac{r}{r_0}$.
4. $\tau = r_0/(v_0\cos\alpha)$. Les deux composantes de l'accélération tendent vers l'infini. $\theta_f = -\tan\alpha\ln(r_f/r_0)$.

**Solution de l'exercice 13**

1. $r_2 = a\dfrac{\sin\theta_1}{\sin|\theta_2 - \theta_1|}$ et $r_1 = a\dfrac{\sin\theta_2}{\sin|\theta_2 - \theta_1|}$
2. $r_1 = \dfrac{a\sin\theta_1}{\epsilon}$
3. Mesure de distance d'étoiles proches.

**Solution de l'exercice 14**

1. Pour la première voiture $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\alpha v^2$. On sépare les variables pour intégrer cette équation :
$$\int\frac{dv}{v^2} = -\alpha\int dt.$$
Après intégration, le résultat obtenu est :
$$-\frac{1}{v} = -\alpha t + cte.$$

On détermine la constante à l'aide de la condition initiale $v(0) = v_1$ d'où $-1/v_1 = cte$. finalement :

$$v = \frac{v_1}{1 + \alpha v_1 t}.$$

Pour obtenir $x(t)$ il suffit d'intégrer l'expression précédente :

$$x(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha v_1 t) + cte.$$

Encore une fois la constante est déterminée à l'aide de la condition initiale $x(0) = 0 = cte$ d'où :

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha v_1 t).$$

2. La relation entre $x$ et $v$ s'écrit :

$$x(v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{v}{v_1}\right).$$

3. a) La vitesse de la seconde voiture est constante donc $x_2(t) = d + v_2 t$.
   b) On en déduit :

$$D = x_2(t) - x(t) = d + v_2 t - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha v_1 t).$$

   c) La distance $D$ est minimale si :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 = v_2 - v(t) \\
\Leftrightarrow &v_2 - \frac{v_1}{1 + \alpha v_1 t} = 0 \\
\Leftrightarrow &v_2 = \frac{v_1}{1 + \alpha v_1 t} \\
\Leftrightarrow &\frac{v_1}{v_2} = 1 + \alpha v_1 t \\
\Leftrightarrow &t = \frac{1}{\alpha v_1}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)
\end{aligned}$$

   Ce qui donne :

$$D_{min} = d + \frac{v_2}{\alpha v_1}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right) - \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

   Pour éviter la collision, il faut que $D_{min} > 0$ :

$$d > \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right) + \frac{v_2}{v_1} - 1\right) = d_{min}.$$

   Application numérique $d_{min} = 46\,\mathrm{m}$.

**Solution de l'exercice 15**

1. $\ell\dot{\varphi}\cos\varphi = r\dot{\theta}\cos\theta$.

2. $\dot{x} = -r\omega \sin\theta \left( 1 + \frac{r}{\ell} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \sin^2\theta}} \right).$

**Solution de l'exercice 16**

Ce sont les points du globe tels que $\cos\varphi = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\theta}$.