Corrigé

Plan de travail n° 3
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I L'optique géométrique

Solution de l'exercice 1
De gauche à droite : lampe spectrale, lampe à incandescence et un laser (monochromatique).

Solution de l'exercice 2
Respectivement : violet, bleu, vert , jaune et rouge.

Solution de l'exercice 3
Si l'on peut négliger les phénomènes de diffraction et d'interférences. Pour cela la longueur caractéristique de variation des propriétés physiques des milieux doit être grande devant la longueur d'onde.

Solution de l'exercice 4
Il faut que $n_1 > n_2$ et que $i > i_{lim} = \arcsin(n_2/n_1)$.

Solution de l'exercice 5
$i = \arctan n$.

Solution de l'exercice 6

1. $i_2 = 29\,^\circ$ et $i_3 = 33\,^\circ$.
2. Non.

Solution de l'exercice 7

Partie I

1. Faire le schéma
2. D'après le schéma si $n_1 > n_2$, zone éclairée au centre et sombre aux bords, l'inverse si $n_2 > n_1$

Partie II

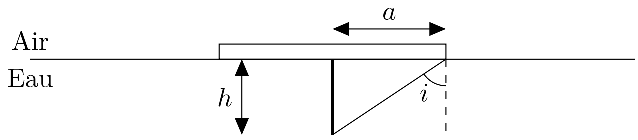
1. La moissanite flotte sur l'iodure de méthylène.
2. La pierre 1 correspond au cas $n_1 < n_2$ il s'agit donc du verre flint. La pierre 2 correspond au cas $n_1 > n_2$ c'est donc du zircon.

Solution de l'exercice 8

1. $(\widehat{MPR}) = \pi - A$
2. $r + r' = A$
3. $D = i + i' - A$
4. Utilisez les lois de Descartes.
5. La réponse est dans l'énoncé.
6. $n = \dfrac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$

Solution de l'exercice 9

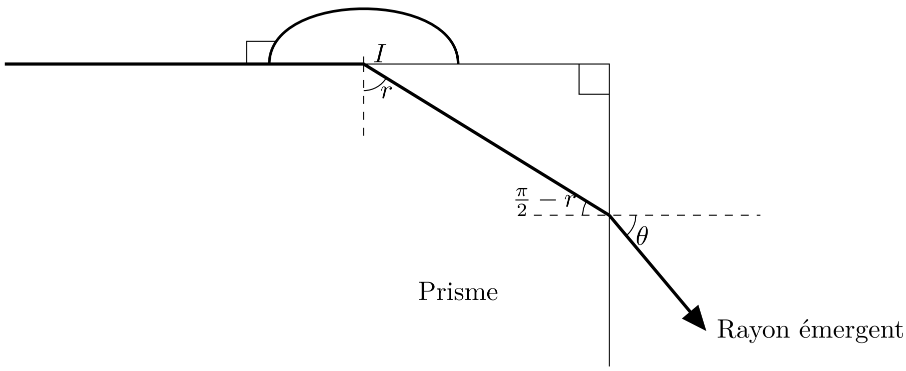
1. Voir le cours, attention le rayon lumineux réfracté doit se rapprocher de la normale.
2. On a le schéma suivant :



Si i est supérieur l'angle de réflexion totale i_l, aucun des rayons lumineux provenant de l'épingle n'est réfracté et l'épingle reste invisible.
Or i_l est tel que $n\sin(i_l) = 1$ et $i > i_l$ si $\sin(i) > \sin(i_l)$ or $\sin(i) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$ d'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} > \sin(i_l)\\
&a^2 > \frac{1}{n^2}(a^2+h^2)\\
&n^2a^2 > a^2+h^2\\
&h < a\sqrt{n^2-1}
\end{aligned}$$

3. Application numérique : $h_0 = a\sqrt{n^2-1} = 2{,}6\,\mathrm{cm}$.
4. Voir le schéma suivant :



5. En utilisant les lois de Descartes de la réfraction, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= N\sin\left(\frac{\pi}{2} - r\right)\\
&= N\cos(r)\\
&= N\sqrt{1-\sin^2(r)}\\
&= N\sqrt{1-\left(\frac{n}{N}\right)^2}\\
&= \sqrt{N^2-n^2}
\end{aligned}$$

   Application numérique : $\theta = 60,7\,^\circ$.
6. Déjà il faut que $n < N$ et de plus il faut que $\sin(\theta) <\leq 1$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sqrt{N^2-n^2} &\leq 1\\
N^2-n^2 &\leq 1\\
n^2 &\geq N^2-1\\
n &\geq \sqrt{N^2-1}
\end{aligned}$$

   Application numérique : $1,28 \leq n \leq 1,625$.

Solution de l'exercice 10

1. Utiliser $n\sin i = cte$.

2. $D = (\frac{n_0}{n} - 1)\tan i_0 = -1,8'$.
3. Rayon de couleur verte.

Solution de l'exercice 11
La réponse est donnée dans l'énoncé.

Solution de l'exercice 12
$\theta = 50\,^\circ$ donc $\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_{plexi}}{n_{verre}}\sin(\theta =)\right) = 47{,}8\,^\circ$. On retrouve θ_2 en B, C...

Avec l'air, l'angle limite de réfraction vaut $\theta_{air} = \arcsin\left(\frac{n_{air}}{n_{verre}}\right) = 40{,}2\,^\circ$, alors qu'vec l'eau il vaut $\theta_{eau} = \arcsin\left(\frac{n_{eau}}{n_{verre}}\right) = 59{,}1\,^\circ$.

Avec l'air, il y a une réflexion totale alors qu'avec l'eau, il y a réfraction et réflexion. De ce fait, le faisceau perd en intensité et ce d'autant plus qu'il y a de gouttes réparties sur le trajet des différents rayons jusqu'au capteur.

II Régime transitoire

Solution de l'exercice 1
Le régime permanent commence aux alentours de $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$, avant c'est le régime transitoire.

Solution de l'exercice 2
Pour le circuit de gauche, $u(0^+) = 0$ et $i(0^+) = e/R_1$ et pour le circuit de droite, $u(0^+) = R_2e/(R_1+R_2)$ et $i(0^+) = 0$.

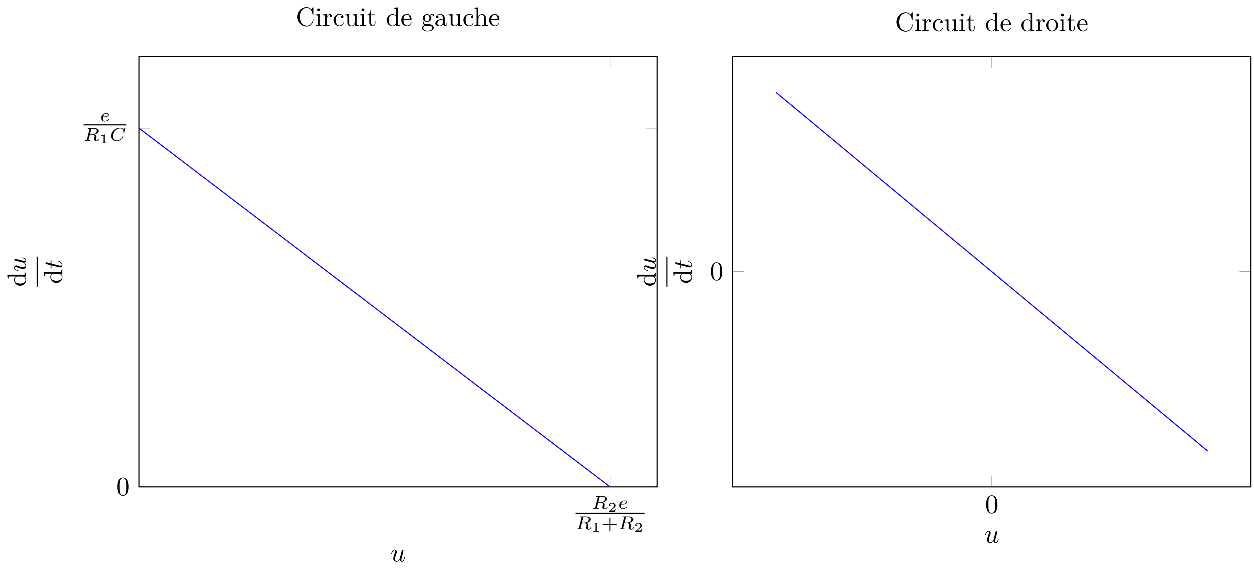
Solution de l'exercice 3
Pour le circuit de gauche :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}u = \frac{e}{R_1C} \\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}i = 0 \end{array}\right.$$

Pour le circuit de droite :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}u = 0 \\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}i = \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}e \end{array}\right.$$

Solution de l'exercice 4
Les tracés donnent :



Solution de l'exercice 5

On obtient :

$$\begin{cases} u(t) &= \frac{R_2e}{R_1+R_2}\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\right) \\ i(t) &= \frac{e}{R_1}\exp\left(-t/\tau\right) \end{cases}$$

avec $\tau = \dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$ pour le circuit de gauche.

Pour le circuit de droite :

$$\begin{cases} i(t) &= \frac{e}{R_1}\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\right) \\ u(t) &= \frac{R_2e}{R_1+R_2}\exp\left(-t/\tau\right) \end{cases}$$

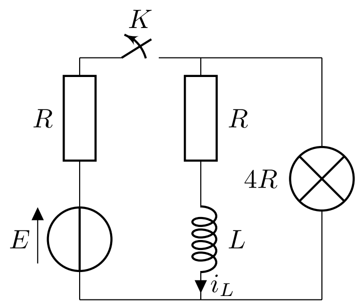
avec $\tau = \dfrac{(R_1+R_2)L}{R_1R_2}$.

Solution de l'exercice 6

Pour le circuit de gauche, on obtient $\Delta t = 5\tau \approx 90\,\mu\mathrm{s}$ et pour le circuit de droite $\Delta t = 5\tau \approx 1{,}4\,\mathrm{ms}$.

Solution de l'exercice 7

Pour le circuit de gauche $\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{2}C\left(\dfrac{R_2e}{R_1+R_2}\right)^2 = \mathcal{E}_J$, et pour le circuit de droite $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}L\left(\dfrac{e}{R_1}\right)^2 = \mathcal{E}_J$



Solution de l'exercice 8

1. $i = \dfrac{E}{9R}$.
2. $i = \dfrac{4E}{9R}$.

Solution de l'exercice 9

1. $i(0^+) = 0$ et $i'(0^+) = \eta$.

2. $i(t) = \dfrac{R'\eta}{R'+R}(1-\exp(-t/\tau))$.
3. $u(t) = R'\eta\dfrac{R+R'\exp(-t/\tau)}{R'+R}$.

Solution de l'exercice 10

1. $i(t) = \dfrac{q_0}{RC}\exp\left(-\dfrac{(C+C')t}{CC'R}\right)$, $q_f = q_0\dfrac{C}{C+C'}$ et $q'_f = q_0\dfrac{C'}{C+C'}$.
2. $W = \dfrac{q_0^2 C'}{2C(C+C')}$.

Solution de l'exercice 11

1. À l'instant $t=0^-$ l'interrupteur K est fermé donc $i(0^-)=0$. Comme l'interrupteur K est fermé depuis très longtemps, le condensateur est chargé est on a $u(0^-)=E$.
   La tension aux bornes du condensateur varie de manière continue donc $u(0^+)=u(0^-)=E$. De plus $u=R_2 i$ d'où $i(0^+)=E/R_2$.
   Lorsque le régime permanent est établi, le condensateur agit comme un interrupteur ouvert et donc $E=(R_1+R_2)i(\infty)$ d'où $i(\infty)=E/(R_1+R_2)$. On a toujours $u=R_2 i$ donc $u(\infty)=R_2E/(R_1+R_2)$.

2. On note i_1 le courant qui circule dans le condensateur. On a donc 3 inconnues i, i_1 et u, il faut donc trois équations :
$$\begin{cases} E - R_1(i+i_1) - u = 0 \\ u = R_2 i \\ i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$
   Après calcul, on trouve :
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}i = \frac{E}{R_1R_2C}.$$
   En notant $\tau = R_1R_2C/(R_1+R_2)$, on obtient après résolution :
$$i(t) = A\exp(-t/\tau) + \frac{E}{R_1+R_2}.$$
   La condition initiale sur i permet de déterminer A :
$$A = i(0^+) - \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{R_1E}{R_2(R_1+R_2)}.$$
   Finalement :
$$i(t) = \frac{R_1E}{R_2(R_1+R_2)}\exp(-t/\tau) + \frac{E}{R_1+R_2}.$$

3. Le courant i est maximal au temps $t=0^+$ et vaut $i(0^+)=E/R_2 = 1{,}4\,\mathrm{mA}$ ce qui ne dépasse pas la valeur maximale autorisée.
4. La durée du régime transitoire est $T = 5\tau = 5R_1R_2C/(R_1+R_2) \approx 2{,}4\,\mathrm{s} < 5\,\mathrm{s}$.
5. L'énergie initalement stockée dans le condesateur s'écrit :
$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu(0^+)^2 = \frac{1}{2}CE^2.$$
   Donc $P_{moy} = \mathcal{E}_C/T = CE^2/(2T) = 7{,}9\,\mathrm{W}$ ce qui dépasse la valeur maximale autorisée.

Solution de l'exercice 12

1. Dipôle non linéaire et passif.
2. $u(t) = E(1-\exp(-t/\tau))$ avec $\tau = RC$.
3. Il suffit que $E > U_a$.
4. $t_0 = \tau\ln\dfrac{E}{E-U_a}$.

5. $u(t) = E\frac{R_e}{R} + \left(U_a - e\frac{R_e}{R}\right)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau'}\right)$; avec $R_e = \frac{rR}{r+R}$ et $\tau' = R_e C$.
6. $U_a > U_e > E\frac{R_e}{R}$.
7. $t_1 = t_0 + \tau' \ln \frac{(r+R)U_a - rE}{(r+R)U_e - rE}$.
8. $T = \tau \ln \frac{U_e - E}{U_a - E} + \tau' \ln \frac{(r+R)U_a - rE}{(r+R)U_e - rE}$.
9. À vous de chercher.
10. $T = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

Solution de l'exercice 13

1. Lors de l'ionisation, il y a apparition de charges libres (électrons et cations) qui rend le milieu conducteur. La résistance du milieu est donc diminuée.
2. Initialement, le condensateur est chargé sous une tension v_1. Quand on ferme l'interrupteur, la tension aux bornes de R_T est égale à celle aux bornes du condensateur. On en déduit :

$$i_T(0^+) = v_1/R_T.$$

En régime permanent, il n'y aplus aucun courant circulant dans le condensateur, on peut donc écrire : $v_1 = Ri_T(\infty) + R_T i_T(\infty)$ d'où :

$$i_T(\infty) = \frac{v_1}{R+R_T}.$$

3. On note i_C le courant circulant dans le condensateur. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} u_c &= R_T i_T \\ v_1 &= R(i_C + i_T) + R_T i_T \end{cases}$$

On dérive la première équation pour faire apparaître i_C :

$$\frac{1}{C} i_C = R_T \frac{\mathrm{d}i_T}{\mathrm{d}t},$$

et on remplace dans la seconde :

$$E = (R + R_T) i_T + R R_T C \frac{\mathrm{d}i_T}{\mathrm{d}t}.$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}i_T}{\mathrm{d}t} + \frac{RR_TC}{R+R_T} i_T = \frac{v_1}{RR_TC}.$$

En posant $\tau = \frac{RR_TC}{R+R_T}$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}i_T}{\mathrm{d}t} + \frac{i_T}{\tau} = \frac{v_1}{RR_TC}.$$

4. La résolution de cette équation différentielle donne :

$$i_T(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{v_1}{R+R_T}.$$

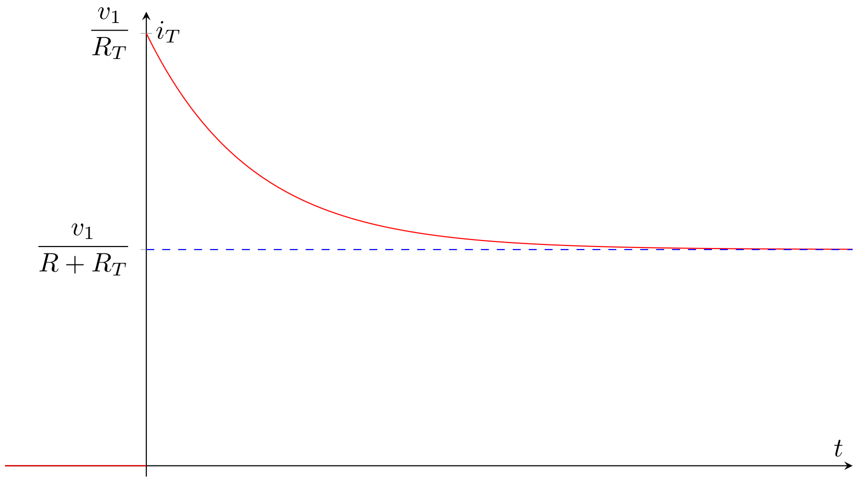
Or initialement on a

$$\begin{aligned} i(0) = \frac{v_1}{R_T} &= A + \frac{v_1}{R+R_T} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{v_1}{R_T} - \frac{v_1}{R+R_T} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{Rv_1}{R_T(R+R_T)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$i_T(t) = \frac{v_1}{R+R_T}\left(\frac{R}{R_T}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+1\right).$$

5. L'allure de $i_T(t)$ est donnée sur la ci-dessous.



Lors de la fermeture de l'interrupteur, le courant circulant dans le tube passe brusquement d'une valeur nulle à une valeur non nulle. Le passage de ce courant dans le tube crée un éclair lumineux.

6. a) Avant la fermeture de l'interrupteur, $u_C = v_1$ donc

$$E_C = \frac{1}{2}Cv_1^2.$$

b) L'énergie du libérée par le flash est de :

$$E_f = 4 * 0.1 = 0{,}4\,\mathrm{J}.$$

On doit avoir au minimum, la même énergie stockée dans le condensateur.

c) La capacité C nécessaire est donc de :

$$C = \frac{2E_f}{v_1^2} = 9\,\mu\mathrm{F}.$$

Cette valeur est relativement élevée par rapport aux condensateurs qu'on utilise habituellement en TP, elle reste néanmoins facilement atteignable.

Solution de l'exercice 14

1. $q(t)$ varie exponentiellement entre $Q_0 = 1{,}03 \times 10^{-8}$ C et $Q_1 = 4{,}97 \times 10^{-8}$ C.
2. $I_m = \frac{C}{T}\frac{1-\exp(-a)}{1+\exp(a)}(V_1 - V_2)$.
3. $R\frac{T}{C}\frac{1+\exp(-a)}{1-\exp(-a)}$. Pour $a \gg 1$, $R = \frac{T}{C}$.

Solution de l'exercice 15

1. Pour $nT < t < (2n+1)/2T$ on a $u = E$ sinon $u = -E$.
2. L'équation de maille donne $u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$ avec $u(t) = \pm E$.
3. La résolution donne :

$$\begin{cases} i_1(t) = A_1\exp(-\frac{R}{L}t) + \frac{E}{R} \\ i_2(t) = A_2\exp(-\frac{R}{L}t) - \frac{E}{R} \end{cases}$$

4. a) La condition de continuité s'écrit : $i_1(T/2) = i_2(T/2)$ qui donne :

$$A_2 - A_1 = \frac{2E}{\alpha R}.$$

b) La condition de périodicité s'écrit $i_1(0) = i_1(T) = i_2(T)$ qui donne :

$$A_2\alpha^2 - A_1 = \frac{2E}{R}.$$

c) Les deux équations précédentes permettent d'isoler A_1 et A_2 :

$$\begin{cases} A_1 & = -\frac{2E}{R(\alpha+1)} \\ A_2 & = \frac{2E}{R\alpha(\alpha+1)} \end{cases}$$

5. a) Finalement :

$$\begin{cases} i_1(t) & = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\exp(-t/\tau)\right) \\ i_2(t) & = \frac{E}{R}\left(-1 + \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}\exp(-t/\tau)\right) \end{cases}$$

b)