Corrigé

Plan de travail n° 2
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Généralités sur les ondes

Solution de l'exercice 1

Pour les signaux acoustiques, la grandeur physique correspondant est la pression. Pour les signaux électriques, la grandeur physique correspondant est l'intensité ou la tension et pour les signaux éléxtromagnétiques il s'agit du champ électrique et du champ magnétique.

Solution de l'exercice 2

Dans l'ordre :

- les ondes acoustiques audibles par l'être humain : de 20 Hz à 20 kHz ;
- le domaine visible par l'être humain : de 4×10^{14} Hz à 8×10^{14} Hz ;
- le domaine des rayons X : de 3×10^{16} Hz à 3×10^{20} Hz ;
- les ondes hertziennes : de 3×10^{5} Hz à 3×10^{11} Hz.

Solution de l'exercice 3

Il suffit de mettre les expressions sous la forme demandée :

- $s(t) = S\sin(-k(x - \omega/kt))$ ainsi $c = \omega/k$;
- $s(t) = Sa(x - b/at)$ et $c = b/a$;
- $s(t) = S\exp\left(ad(x + t/(db)\right)$ et $c = 1/db$;
- $s(t) = S\ln(x + at)/(b(x + d/bt))$ et $c = a = d/b$.

Solution de l'exercice 4

De la même manière que dans l'exercice précédent :

- $s(t) = S\sin(\omega(t - kx/\omega))$ ainsi $c = \omega/k$;
- $s(t) = -Sb(t - ax/b)$ et $c = b/a$;
- $s(t) = S\exp\left(a/b(t + dbx)\right)$ et $c = 1/db$;
- $s(t) = S\ln(a(t + x/a)/d(t + bx/d)$ et $c = a = d/b$.

Solution de l'exercice 5

On trouve $u(x,t) = b\left(a^2 - (x - ct)^2\right)$ si $-a \leq x - ct \leq a$ et 0 sinon.

Solution de l'exercice 6

Il suffit de tracer la forme de l'onde à un instant t puis à un instant $t + T$ et de dire que la distance parcourue par l'onde pendant ce temps est égale à $cT = \lambda$.

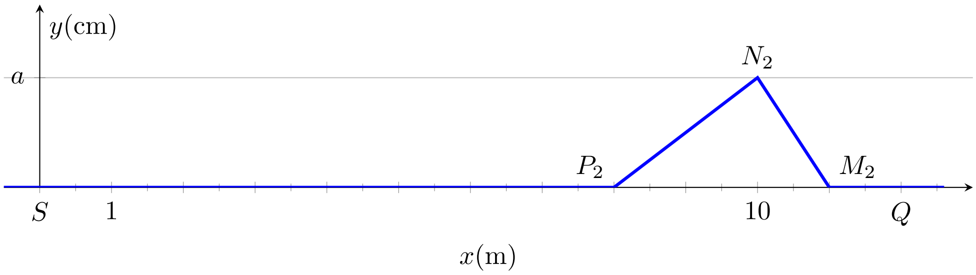
Solution de l'exercice 7

Dans l'ordre : non, oui (régressive), oui, non, non.

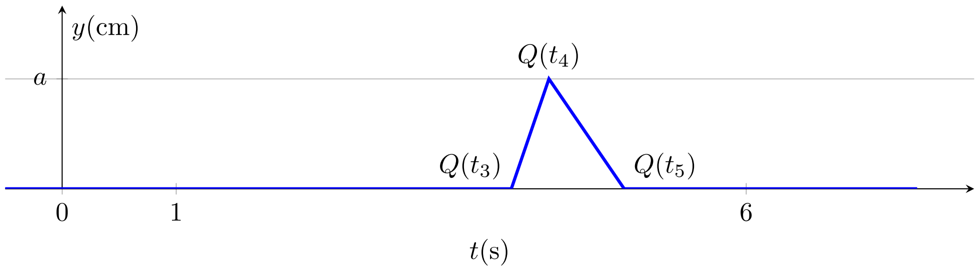
Solution de l'exercice 8

1. $\lambda = 40\,\text{cm}$.
2. $y = y_0\sin(3\pi(t - 1/4))$ avec $y_0 = 0{,}75\,\text{cm}$
3. $\varphi = 360° * 3 + 144°$.

Solution de l'exercice 9

1. $c = 3{,}04\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
2. $\Delta t = 0{,}99\,\mathrm{s}$.
3. L'ordonnée augmente pour tous les points entre M_1 et N_1 et elle diminue pour tous les points entre N_1 et P_1.
4. $x = 11{,}0\,\mathrm{m}$.
5. 

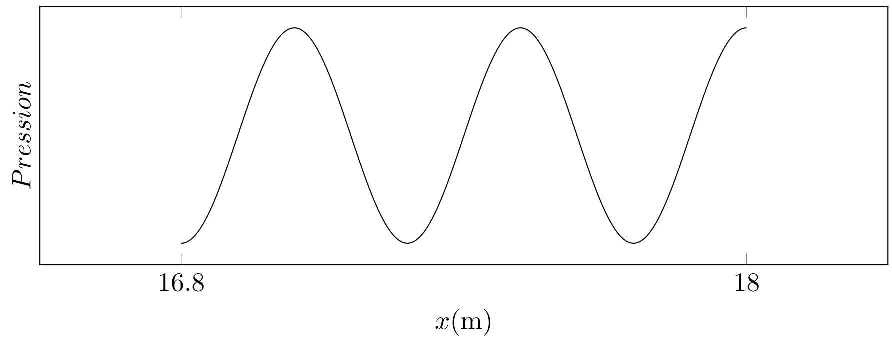
6. a) $t_3 = 3{,}94\,\mathrm{s}$.
   b) $T_4 = 4{,}27\,\mathrm{s}$.
   c) $t_5 = 4{,}93\,\mathrm{s}$.
   d)



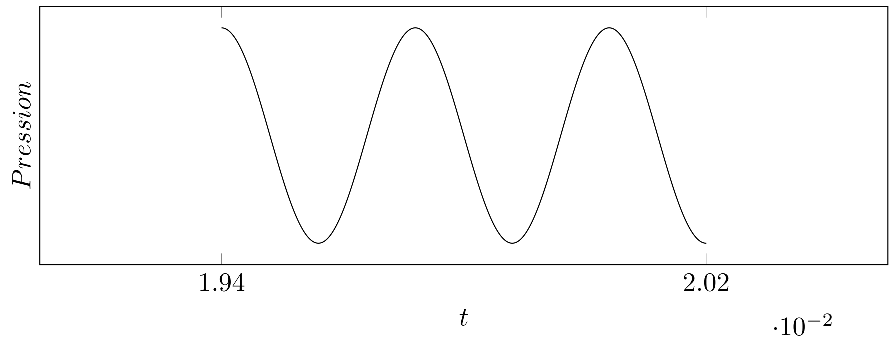
Solution de l'exercice 11

1. a) Par définition, une onde est une perturbation apparue dans un domaine donné qui se propage avec une vitesse bien définie. C'est à la fois un phénomène spatial et temporel car la grandeur physique associée dépend du temps en un point donné et elle dépend de la position à un temps donné.
   La grandeur physique associée à une onde acoustique est la pression.
   b) Le son ne peut se propager que dans un milieu matériel (pas le vide). On peut citer les ondes le long d'une corde et les ondes sismiques comme autre exemple d'onde mécanique.
   c) Le spectre audible s'étend de $20\,\mathrm{Hz}$ à $20\,\mathrm{kHz}$ environ. Les ultrasons sont des sons inaudibles pour l'oreille humaine dont la fréquence est supérieure à $20\,\mathrm{kHz}$.
   L'échographie utilise des ultrasons dans le domaine de l'imagerie médicale.
   d) Comme la vitesse de la lumière est très élevée, on peut considérer que l'éclair est vu à l'instant t_0 où il est émis. Le son lui met un temps $\Delta t = d/c$ pour parcourir la distance d qui nous sépare de l'éclair. Ainsi l'écart temporel entre la vision de l'éclair et la perception du tonnerre est égal à Δt d'où $c = d/\Delta t$.
   Application numérique : $c = \Delta t/3 \times 1000/\Delta t \approx 330\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
2. a) Le sonar mesure la durée Δt entre l'émission et la réception de l'onde, ainsi $\Delta t = 2d/c$ et d en est déduit : $d = \frac{c}{2}\Delta t$.
   b) Application numérique : $d \approx 29\,\mathrm{m}$.
   c) Sur Δt_i =800 µs on observe 2,5 périodes donc $2,5T = \Delta t_i$ et $f = \frac{2{,}5}{\Delta t_i} = 3125\,\mathrm{Hz}$.
   d) Simplement $\Delta x = c\Delta t_i = 1{,}2\,\mathrm{m}$.
   e) Le début de l'impulsion émis à $t_0 = 0$ se retrouve en $x_0 = ct = 18\,\mathrm{m}$ alors que la fin de l'impulsion émise en $t_1 = \Delta t_i$ se retrouve en $x_1 = c(t - t_1) = 16{,}8\,\mathrm{m}$.
   La forme générale de l'onde pour $t = 12\,\mathrm{ms}$ s'écrit :

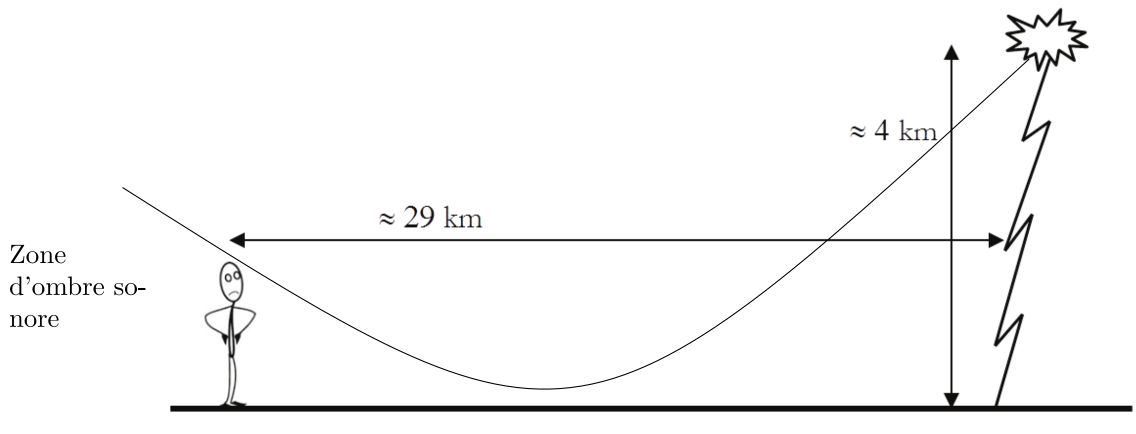
$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) = p_0 \cos(2\pi f(t - x/c)).$$



f) Pour le détecteur, le signal est perçu en $x = d$ et le début de l'impulsion arrive au temps $t_2 = cd = 19{,}4\,\mathrm{ms}$ et la fin de l'impulsion Δt_i plus tard soit $t_3 = 20{,}2\,\mathrm{ms}$.
Le signal perçu s'écrit $s(t) = p_0 \cos(\omega t - kd) = p_0 \cos(2\pi f(t - d/c))$;



3. a) Application numérique : $c \approx 347\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   b) Il faudrait préciser si la température augmente ou diminue, supposons qu'elle augmente de ΔT : $\Delta c = c(T_0 + \Delta T) - c(T_0) = 0{,}58\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
   c) Dans la configuration d'un orage, la vitesse du son est plus faible en altitude ou la température est plus faible, les ondes sonores s'incurvent donc vers le haut.



Solution de l'exercice 12

On trouve $\nu_r = \nu \dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}$, l'objet se rapproche donc du radar et on trouve $v = 142\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Solution de l'exercice 13

1. En raisonnant de la même manière que dans l'exercice **??**, on trouve $f_R = f_0(1 - v/c)$ c'est-à-dire $\lambda_r = \lambda_0/(1 - v/c)$ donc $\lambda_R - \lambda_0 = \lambda_R \times v/c$. On trouve $\lambda_R - \lambda_0 > 0$ donc $v > 0$ la galaxie s'éloigne de l'observateur.
2. Considérons les deuc pics d'émission du spectre, celui de gauche donne $v_1 = 2230\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et le pic de droite donne $v_2 = 2480\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Celà donne une vitesse moyenne d'éloignement de $2360\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

3. La vitesse moyenne de rotation est de $125\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

II Circuits en régime continu

Solution de l'exercice 1

Comme $q/e \notin \mathbb{N}$ on peut conclure que le résultat de l'étudiant n'est pas cohérent.

Solution de l'exercice 2

La définition du courant permet de calculer $|i| = \dfrac{ne}{\Delta t} = 1{,}6\,\mathrm{A}$.

Solution de l'exercice 3

La relation vue en cours indique $L \ll cT = c/f \approx 30\,\mathrm{m}$.

Solution de l'exercice 4

D'après la loi des nœuds, un courant de $0,50 - 0,22 = 0{,}28\,\mathrm{A}$ partira du troisième fil ce qui donne une charge de $1{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}$.

Solution de l'exercice 5

On trouve :

$$\begin{cases} E + u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ E - u_4 - u_5 + u_6 = 0 \\ u_2 - u_4 - u_5 + u_6 = 0 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6

Dans l'ordre :

$$\begin{cases} u = E \\ u = -Ri \\ u = -E \\ u = Ri \end{cases}$$

Solution de l'exercice 7

Dans le domaine de :

- électronique $u = 10\,\mathrm{V}$ et $i = 10\,\mathrm{mA}$;
- électricité domestique $u = 200\,\mathrm{V}$ et $i = 10\,\mathrm{A}$;
- électricité industrielle $u = 25 \times 10^3\,\mathrm{V}$ et $i = 1 \times 10^3\,\mathrm{A}$.

Solution de l'exercice 8

L'écriture de l'équation de maille permet de déterminer i :

$$E + R_1 i + R_2 i + R_3 i = 0.$$

D'où

$$i = -\frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Solution de l'exercice 9

Ordre de grandeur de la résistance d'un fil : $0{,}1\,\Omega$. Ordre de grandeur des résistances utilisées en TP : entre $10\,\Omega$ et $10\,\mathrm{M\Omega}$.

Solution de l'exercice 10

Les trois résistances sont en série donc $R_{eq} = 3R$ d'où $P = 3RI^2$.

Solution de l'exercice 11

Il suffit de mettre une source idéale de tension ensérie avec un résistor. La relation entre tension et intensité s'écrit alors $u = E - Ri$ aux bornes d'un tel dipôle.

Solution de l'exercice 12

Les trois résistances R, $2R$ et R sont en parallèle donc :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}.$$

On trouve donc $R_{eq} = \frac{2R}{5}$. Cette résistance équivalente est associée en série à deux résistances $2R$ et R :

$$R_{tot} = R + 2R + R_{eq} = \frac{17R}{5}.$$

Solution de l'exercice 13

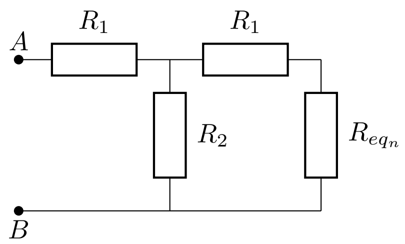
1. $u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}E$.
2. $i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}i$.
3. $u = \frac{E}{6}$ et $i = \frac{6}{11}I$

Solution de l'exercice 14

Il suffit que $G_N = \dfrac{1}{R_T}$ et que $E = R_T I_0$.

Solution de l'exercice 15

1. Le schéma est le suivant :



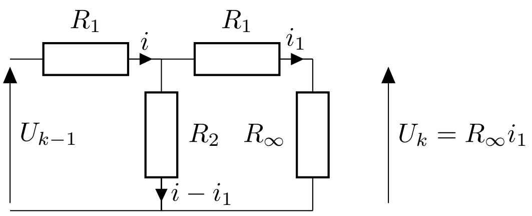
   On peut alors écrire $R_{eq_{n+1}} = R_1 + \dfrac{R_2(R_{eq_n} + R_1)}{R_1 + R_2 + R_{eq_n}}$.

2. Si $n \to \infty$ alors $R_{eq_{n+1}} = R_{eq_n} = R_\infty$ et

$$R_\infty = R_1 + \frac{R_2(R_\infty + R_1)}{R_1 + R_2 + R_\infty}$$
$$R_\infty R_1 + R_\infty R_2 + R_\infty^2 = R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_\infty + R_2R_\infty + R_2R_1$$
$$R_\infty^2 = R_1^2 + 2R_1R_2$$

   D'où $R_\infty = \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$.

3. Puisque la ligne téléphonique est infinie, nous avons le circuit équivalent :



   On écrit deux équations de mailles (deux inconnues) :

$$\begin{cases} U_{k-1} - R_1 i - R_2\left(i - \frac{U_k}{R_\infty}\right) = 0 \\ U_k + \frac{R_1}{R_\infty}U_k - R_2\left(i - \frac{U_k}{R_\infty}\right)) = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $i = \dfrac{U_{k-1} + \frac{R_2}{R_\infty} U_k}{R_1 + R_2}$. En injectant dans la seconde équation, on obtient :

$$\begin{aligned}
&U_k \left(1 + \frac{R_1}{R_\infty} + \frac{R_2}{R_\infty}\right) - R_2 \left(\frac{U_{k-1} + \frac{R_2}{R_\infty} U_k}{R_1 + R_2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &U_k \left(1 + \frac{R_1}{R_\infty} + \frac{R_2}{R_\infty} - \frac{R_2^2}{R_\infty (R_1 + R_2)}\right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{k-1} \\
\Leftrightarrow &U_k = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)\left(1 + \frac{R_1}{R_\infty} + \frac{R_2}{R_\infty} - \frac{R_2^2}{R_\infty (R_1 + R_2)}\right)} U_{k-1} \\
\Leftrightarrow &U_k = \frac{R_2 R_\infty}{R_1 R_\infty + R_2 R_\infty + R_1 R_2 + R_1^2 + R_2 R_1} U_{k-1} \\
\Leftrightarrow &U_k = \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_\infty + R_1^2 + 2 R_1 R_2}{R_2 R_\infty}} U_{k-1} \\
\Leftrightarrow &U_k = \frac{1}{1 + \frac{R_\infty R_1 + R_\infty^2}{R_2 R_\infty}} \\
\Leftrightarrow &U_k = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_\infty}{R_2}}
\end{aligned}$$

4. C'est une simple suite géométrique donc $U_k = \dfrac{U_0}{(1+\beta)^k}$.
5. On résout $U_k = U_0/2$ ce qui amène à $k = \ln(2)/(\ln(1+\beta))$.
   A.N. : $k = 3{,}8 \times 10^5$. La longueur de la ligne vaut $L = k \times 0,4 \approx 150\,\text{km}$.

Solution de l'exercice 16

1. $U_0 = \left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} - \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}\right) E$.
2. $i = 0$ si $R_3 R_1 = R_2 R_4$.
3. On constitue un pont avec deux résistances R_0, R_m et R_X et on essaye d'annuler i en faisant varier R_m.

Solution de l'exercice 17

1. a) La tension à vide (en circuit ouvert) correspond à la tension aux bornes de l'alimentation quand $i = 0$, c'est-à-dire $U_0 = 6\,\text{V}$. Le courant de court-circuit correspond au courant traversant l'alimentation quand la tension à ses bornes est nulle : $I_{cc} = 0{,}4\,\text{A}$.
   b) L'alimentation stabilisée est équivalente à une source de tension si $i < I_{cc}$ et à une source de courant si $u < U_0$.
2. Si $R > \dfrac{U_0}{I_{cc}}$ alors on a un fonctionnement en source de tension, sinon on a un fonctionnement en source de courant.

Solution de l'exercice 18

1. $P = \dfrac{R}{(R+r)^2} E^2$.
2. $R = r$
3. $\eta = 0,5$ pour un montage adapté.

Solution de l'exercice 19

1. Le voltmètre mesure la tension à vide et l'ampèremètre le courant de court-circuit.
2. Quand U et I sont positifs. $P_{max} = U_0 \cdot I_{cc}$
3. $0{,}49\,\text{V} < U_0 < 0{,}54\,\text{V}$.
4. $I = gE - I_s(\exp(U/V_T) - 1)$.
5. $\eta = 0,17$

6. En série la tension à vide est doublée, en parallèle c'est le courant de court-circuit.
7. $U_0 = 18\,\mathrm{V}$.

Solution de l'exercice 20

1. On a

$$R_1 = R_0 \exp\left(\frac{a}{T_1}\right) \tag{1}$$
$$R_2 = R_0 \exp\left(\frac{a}{T_2}\right) \tag{2}$$

Avec $R_1 = 5000\,\Omega$, $T_1 = 273$ K , $R_2 = 100\,\Omega$ et $T_2 = 323$ K. On fait (1)/(2) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{R_1}{R_2} = \exp\left(\frac{a}{T_1} - \frac{a}{T_2}\right) \\
\Leftrightarrow &\frac{a}{T_1} - \frac{a}{T_2} = ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \\
\Leftrightarrow &a = \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \\
\Leftrightarrow &a = 6900\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

D'où

$$R_0 = \frac{R_1}{\exp\left(\frac{a}{T_1}\right)} = 5{,}8 \times 10^{-8}\,\Omega$$

Application numérique :

$$R(293) = 895\,\mathrm{K}.$$

2. a) C'est un diviseur de tension.
   b) On a donc :

$$\begin{aligned}
&U_K = \frac{R_K}{R(T) + R_K} E \\
\Leftrightarrow &E = \frac{R(T) + R_K}{R_K} U_K \\
\Leftrightarrow &E = \left(1 + \frac{R(T)}{R_K}\right) U_K \\
\Leftrightarrow &E = 22{,}4\,\mathrm{V}.
\end{aligned}$$

   La température désirée est obtenue pour une valeur intermédiaire entre 1,5 et 3 V.
   c) On calcule T correspondant à $U_K = 1,5$ V :

$$\begin{aligned}
&U_K = \frac{R_K}{R_K + R(T)} E \\
\Leftrightarrow &(R_K + R(T))U_K = R_K E \\
\Leftrightarrow &R(T) = R_K\left(\frac{E}{U_K} - 1\right) \\
\Leftrightarrow &R_0 \exp\left(\frac{a}{T}\right) = R_K\left(\frac{E}{U_K} - 1\right) \\
\Leftrightarrow &T = \frac{a}{\ln\left(\frac{R_K}{R_0}\left(\frac{E}{U_K} - 1\right)\right)}
\end{aligned}$$

   Applications numériques : pour $U_K = 1,5$ V on obtient $T = 288$ K et pour $U_K = 3\,\mathrm{V}$ on a $T = 297$ K. Ainsi le système de chauffage démarre si $T \geq 288$ K et s'arrête si $T \leq 297$ K ce qui fait un écart de température de 11 K. Cet écart est trop important, le but est de garder une température constante.

Solution de l'exercice 21

1. a) En écrivant une équation de maille dans le second montage, on obtient :

$$u_{BE} = E' - R' i_B.$$

On essaye d'obtenir une équation liant u_{BE}, E, R, $R(T)$ et i_B grâce au premier montage. On écrit deux équations de maille (il y a deux courants inconnus i_B et le courant i délivré par le générateur idéal de courant de f.e.m E) :

$$\begin{cases} E &= R(T)i + u_{BE} \\ u_{BE} &= R(i - i_B) \end{cases}$$

On isole i grâce à la seconde équation :

$$i = i_B + \frac{u_{BE}}{R}.$$

Et on remplace dans la première équation :

$$\begin{aligned} &E = R(T)\left(i_B + \frac{u_{BE}}{R}\right) + u_{BE} \\ \Leftrightarrow &u_{BE}\left(1 + \frac{R(T)}{R}\right) = E - R(T)i_B \\ \Leftrightarrow &u_{BE} = \frac{R}{R+R(T)}E - \frac{RR(T)}{R+R(T)}i_B \end{aligned}$$

En assimilant on trouve :

$$\begin{cases} E' &= E\frac{R}{R+R(T)} \\ R' &= \frac{RR(T)}{R+R(T)} \end{cases}$$

b) On a $U_K = R_K i_C$ et on écrit une équation de maille :

$$E' = R_{eq} i_B + U_{BE}$$

De plus $E = U_K = R_K i_C = \beta R_K i_B$ or $i_B = \dfrac{E_{eq} - U_{BE}}{R_{eq}}$ donc :

$$\begin{aligned} &U_K = \beta R_K \frac{E_{eq} - U_{BE}}{R_{eq}} \\ \Leftrightarrow &U_K = \beta R_K \left(\frac{E}{R(T)} - U_{BE}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R(T)}\right)\right) \\ \Leftrightarrow &\frac{U_K}{\beta R_K} + \frac{U_{BE}}{R} = \frac{E}{R(T)} - \frac{U_{BE}}{R(T)} \\ \Leftrightarrow &\frac{U_{BE}}{R} = \frac{E}{R(T)} - \frac{U_{BE}}{R(T)} - \frac{U_K}{\beta R_K} \\ \Leftrightarrow &R = \frac{U_{BE}}{\frac{E}{R(T)} - \frac{U_{BE}}{R(T)} - \frac{U_K}{\beta R_K}} \\ \Leftrightarrow &R = 48\ \Omega \end{aligned}$$

c) Si on reprend la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{E - U_{BE}}{R(T)} = \frac{U_K}{\beta R_K} + \frac{U_{BE}}{R} \\ \Leftrightarrow &R(T) = \frac{E - U_{BE}}{\frac{U_K}{\beta R_K} + \frac{U_{BE}}{R}} \\ \Leftrightarrow &R_0 \exp\left(\frac{a}{T}\right) = \beta R_K \frac{E - U_{BE}}{U_K + \beta \frac{R_K}{R} U_{BE}} \\ \Leftrightarrow &T = \frac{a}{\ln\left(\beta \frac{R_K}{R_0} \cdot \frac{E - U_{BE}}{U_K + \beta \frac{R_K}{R} U_{BE}}\right)}. \end{aligned}$$

Application numérique :

- pour $U_K = 1,5$ V, on obtient $T = 292,9$ K ;
- pour $U_K = 3$ V, on obtient $T = 293,1$ K.

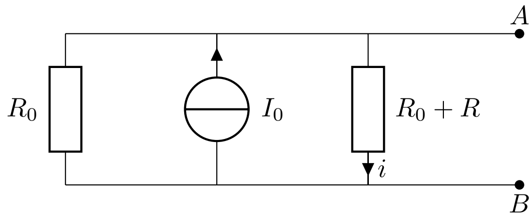
La température ne varie plus qu'entre 292,9 K et 293,1 K, elle est quasiment constante, la régulation joue bien son rôle.

Solution de l'exercice 22

Pour $u < 0$, on trouve une droite de pente $1/R'$ qui passe par l'origine et pour $u > 0$, une droite de pente $(R + R')/(RR')$ qui passe par l'origine.

Solution de l'exercice 23

1. Tant que le circuit est ouvert entre A et B, les résistances R_0 et R sont associées en série. Le dipôle est donc équivalent à :



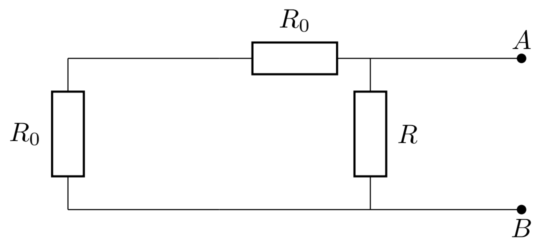
Le courant i se calcule grâce à la formule du diviseur de courant : $i = \dfrac{\frac{1}{R_0+R}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0+R}} I_0 = \dfrac{R_0}{2R_0 + R} I_0$.

La tension entre A et B est égale à la tension aux bornes de R : $U_{AB} = Ri = I_0 \dfrac{RR_0)}{2R_0 + R}$. La condition imposée donne :

$$\begin{aligned} I_0 \frac{RR_0}{2R_0 + R} &= R_0 \frac{I_0}{2} \\ \Leftrightarrow 2R &= 2R_0 + R \\ \Leftrightarrow R &= 2R_0 \end{aligned}$$

2. a) Si aucun courant ne passe lorsque la source de courant est éteinte, on peut la modéliser par un interrupteur ouvert.

   b) Dans ce cas le dipôle est équivalent à :



Le résistor de résistance $R = 2R_0$ est en parallèle avec un résistor de résistance $2R_0$ donc $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_0}$ qui donne $R_{eq} = R_0$.

3. Le dipôle est équivalent si la tension $U_{AB} = R_0 I_0/2 = R_{eq}\eta$, cela donne $\eta = I_0/2$.
4. On remplace la première cellule par une source idéale de courant de courant électromoteur $I_1/2$ en parallèle avec une résistance R_0. En associant cette source de courant avec la suivante on trouve une source de courant équivalente de courant électromoteur $I_2 + I_1/2$. On retombe sur une cellule identique qui est équivalente à une source idéale de courant de courant électromoteur $I_2/2 + I_1/4$ en parallèle avec une résistance R_0.

   Finalement le circuit est équivalent à une source idéale de courant de courant électromoteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{I_i}{2^{k-i}}$ en parallèle avec une résistance R_0. La tension $U_s = R_0 \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{I_i}{2^{k-i}}$.
5. Il suffit de remplacer chaque I_i par $a_i I_0$: $U_s = R_0 I_0 \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^{k-i}}$.

6. La tension U_s peut aussi s'écrire : $U_s = \frac{R_0 I_0}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} a_i$, ainsi U_s est proportionnelle à N si $a_{i+1} = b_i$.
   Avec 8 cellules, on peut convertir des nombres compris entre 0 et $255 = 2^8 - 1$.
7. a) Le courant qui circule dans la résistance R est égal à $\sum_k a_k i_k$ avec i_k le courant circulant dans R_k (il faut appliquer la loi des nœuds et prendre en compte que $i_- = 0$).De plus $E = R_k i_k$ pour tout k (en faisant une loi des mailles et en utilisant le fait que $\epsilon = 0$).
   Finalement $U_s = Ri = R \sum_k a_k i_k = RE \sum_k \frac{a_k}{R_k}$.
   b) $U_s = \alpha N = \alpha \sum_k b^i 2^i = RE \sum_k \frac{a_k}{R_k}$. Il faut donc choisir $a_k = b_k$ et $R_k = 2^{-i} R$.

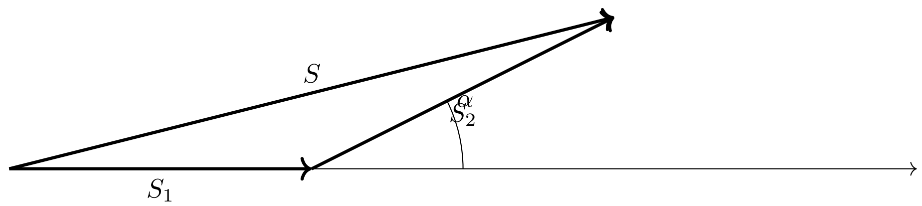
III Interaction entre deux ondes

Solution de l'exercice 1

On cherche S tel que :

$$S_1 \cos(\omega t - kx) + S_2 \cos(\omega t - kx - \varphi) = S \cos(\omega t - \varphi')$$

Le schéma est réalisé en un temps t_1 tel que $\omega t_1 - kx = 0$:



Ici $\alpha = \omega t_1 - kx - \varphi = -\varphi$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S^2 &= (S_1 + S_2\cos(\varphi))^2 + (S_2 \sin(\varphi))^2 \\ &= S_1^2 + S_2^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + 2S_1S_2\cos(\varphi) \\ &= S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

Comme $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi)}$, on trouve des interférences destructives si S est minimal donc si $\varphi = (2n+1)\pi$. De même, on trouve des interférences constructives si $\varphi = 2n\pi$.

Solution de l'exercice 3

La solution générale s'écrit simplement comme une somme de modes propres :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} - \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Solution de l'exercice 4

On trouve l'angle de diffraction $\sin\theta = \lambda/d \approx 5 \times 10^{-4} \approx \theta$. En notant D la taille de la tâche de diffraction, on a $\tan\theta = D/(2\ell)$ avec $\ell = 1\,\text{m}$ d'ou $D = 2\ell\tan(\theta) = 1\,\text{mm}$.

Solution de l'exercice 5

1. $\lambda = 34\,\text{cm}$.
2. a) $u_g(x,t) = A\cos(2\pi f t - kx)$
   b) $u_d(x,t) = A\cos(2\pi f t + k(x-d))$
   c) $d_n = \frac{\lambda}{2} + n\lambda$.
   d) Pour $n = 0$ on a deux nœuds et un ventre de vibration, pour $n = 1$ c'est 4 et 3 ...
   e) $d'_n = n\lambda$, les deux ondes sont en phase, les interférences sont constructives.

Solution de l'exercice 6

1. $f = c/(4L)$.
2. $2L$
3. On observe un nœud de vibration.
4. $c = 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
5. Harmonique de rang 4, $f_1 = 210\,\mathrm{Hz}$.

Solution de l'exercice 7

1. $c = 336\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
2. Do_4, Sol_4, Do_5, Mi_5, Sol_5 et entre La et La≡.
3. Au 1/7 ème de la corde par exemple.

Solution de l'exercice 8

1. $S_1(-A/2, 0)$, $S_2(a/2, 0)$ et $M(x, D)$.
2. a) $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2}$
   b) Variation de phase et d'amplitude.
3. a) $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi)$ avec$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
   b) $\varphi = 2k\pi$
   c) $i = \dfrac{\lambda d}{a}$.

Solution de l'exercice 9

1. En utilisant les conditions aux limites, et en écrivant que
$$u(x,t) = u_1\cos(\omega t - kx - \varphi_1) + u_2\cos(\omega t + kx - \varphi 2).$$
On trouve
$$u(x,t) = \frac{z_0}{\sin(kL)}\sin(\omega t)\sin(k(L-x)).$$
2. On néglige les pertes énergétiques lors des réflexions et le vibreur donne de l'énergie à la corde. L'amplitude du signal ne fait alors que croître.

Solution de l'exercice 10

1. En utilisant la formule de la diffraction plus l'approximation des petits angles ($\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$) on trouve $r = \lambda f'/d$.
2. Il faut $E'P' > r$ or $\tan\alpha = E'P'/f' = e/D$ d'où $e = E'P' \times D/f'$ donc $e > \lambda D/d$. L'application numérique donne $e < 3{,}8 \times 10^{12}\,\mathrm{m} \approx 25\times$ distance Terre-Soleil.

Solution de l'exercice 11

1. $s(x,t) = A_0\cos(\omega t + kx - kL - \pi/2)$ et $s'(x,t) = A_0\cos(\omega t - kx - kL - \pi/2)$ alors $s_{tot}(x,t) = 2A_0\cos(\omega t - kL - \pi/2)\cos(kx)$
2. C'est une onde stationnaire. En $x = 0$ on a un maximum d'amplitude, c'est un ventre.
3. $f_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{c}{2D}$.
4. $A_{0_{dB}} = A_{maxdB} - 20\log 2 = 91\,\mathrm{dB}$.
5. $D = \frac{c}{2\Delta f} \approx 8{,}3\,\mathrm{cm}$.
6. $D < c/(4f_0) = 4{,}25\,\mathrm{mm}$.
7. $f_n = \dfrac{nc}{\sqrt{4h^2 + d^2} - d}$ pour un interférence constructive et $f_n = \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)c}{\sqrt{4h^2 + d^2} - d}$ pour un interférence destructive.

Solution de l'exercice 12

1. On suppose qu'on peut écrire :
$$c = k \times g^{\alpha}\mu^{\beta}H^{\gamma}.$$

On passe à l'équation aux dimensions :

$$\begin{aligned} L \cdot T^{-1} &= (L \cdot T^{-2})^{\alpha}(M \cdot L^{-3})^{\beta} L^{\gamma} \\ L \cdot T^{-1} &= L^{\alpha-3\beta+\gamma} T^{-2\alpha} M^{\beta} \end{aligned}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} 1 &= \alpha - 3\beta + \gamma \\ 0 &= \beta \\ -1 &= -2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après les indications de l'énoncé, cela donne $c = \sqrt{gH}$.

2. On peut calculer la hauteur d'eau moyenne entre les points A et B : $c = \dfrac{16000}{15 \times 60} = 18\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, d'où $H = \dfrac{c^2}{g} = 32\,\mathrm{m}$.
   On fait de même entre B et C : $c = \dfrac{36000}{36 \times 60} = 17\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, d'où $H = \dfrac{c^2}{g} = 28\,\mathrm{m}$.
   Il est normal qu'en s'éloignant de l'estuaire et en se rapprochant de la côte la hauteur moyenne diminue.
3. a) Comme on peut écrire $\xi(x,t) = f(t) \cdot g(x)$, c'est que l'on a affaire à une onde stationnaire.
   b) On utilise les deux conditions aux limites :

$$\begin{cases} A\cos(\omega t) = \xi_0 \cos(\omega t) \\ (-kA\sin(kL) + kB\cos(kL))\cos(\omega t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= \xi_0 \\ B &= A\tan(kL) \end{cases}$$

   Finalement :

$$\xi(x,t) = \xi_0(\cos(kx) + \tan(kL)\sin(kx))\cos(\omega t).$$

   c) Vu la taille de l'amplitude de marée, c'est qu'on a un phénomène de résonance. Ce phénomène s'observe quand l'amplitude est très grande, c'est à dire $\tan(kL) \to \infty$ d'où $kL = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit $\dfrac{2\pi}{\lambda} L = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\lambda = 4L = cT$. Avec la relation $H = \dfrac{c^2}{g}$, on trouve finalement :

$$H = \frac{16L^2}{gT^2} = 51\,\mathrm{m} \ll 4L = 1000\,\mathrm{km}.$$

4. a) On suppose une onde de la forme :

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + B\cos(\omega t + kx).$$

   Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} kA\sin(\omega t - kL) - kB\sin(\omega t + kL) = 0 \\ kA\sin(\omega t) - kB\sin(\omega t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2A\cos(\omega t)\sin(-kL) = 0 \end{cases}$$

   On en déduit une condition d'existence de l'onde stationnaire :

$$kL = n\pi \Leftrightarrow L = \frac{n\lambda}{2}.$$

   b) Dans le cas de la Méditerranée, on a $c = \sqrt{gH} = 140\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ d'où $\lambda = cT = 6250\,\mathrm{km}$, or $L = 1500\,\mathrm{km} < \dfrac{\lambda}{2}$ donc la condition d'existence de l'onde stationnaire ne peut être remplie, ce qui explique la quasi-inexistence des marées en Méditerranée.
   Par contre la condition H faible paraît moins réaliste ici.

Solution de l'exercice 13

1. L'onde subit un déphasage du fait de sa propagation : $s_{1_M}(t) = s_0 \cos(\omega t - k \times S_1M + \varphi_1)$.
2. De même, sauf que la distance parcourue est différente. La phase à l'origine est identique car il est indiqué dans l'énoncé que les deux ondes sont en phase : $S_{2_M}(t) = s_0 \cos(\omega t - k \times S_2M + \varphi_1)$.
3. Le signal $S_M(t)$ reçu en M s'écrit comme la somme des deux signaux reçus :

$$\begin{aligned} s_M(t) &= s_0(\cos(\omega t - k \times S_1M + \varphi_1) + \cos(\omega t - k \times S_2M + \varphi_1) \\ &= 2s_0 \cos(\omega t - k \times (S_1M + S_2M)/2 + \varphi_1)\cos(k \times (S_2M - S_1M)/2) \\ &= 2s_0 \cos(\omega t + \varphi_2)\cos(k\delta/2) \end{aligned}$$

4. On calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{S_1M}$: $S_1M = \sqrt{\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + d^2}$. De même $S_2M = \sqrt{\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + d^2}$.
5. L'approximation permet d'écrire $S_1M \approx d\left(1 + \frac{(z-a/2)^2}{2d^2}\right)$ et $S_2M \approx d\left(1 + \frac{(z+a/2)^2}{2d^2}\right)$ d'où :

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{(z+a/2)^2}{2d} - \frac{(z-a/2)^2}{2d} = \frac{az}{d}.$$

6. D'après l'indication de l'énoncé :

$$I(M) = \left\langle 4s_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2)\cos^2\left(\frac{kaz}{2d}\right)\right\rangle = 2I_0 \cos^2\left(\frac{kaz}{2d}\right).$$

7. Au point O, $z = 0$ et $I(M) = 2I_0 = I_{max}$, on observe une frange brillante.
8. La figure d'interférence est une succession de franges brillantes et sombres. On trouve une frange brillante si $kaz_n/(2d) = n\pi$ donc si $z_n = nd\lambda/a$.
   Considérons deux franges brillantes successives et calculons la distance entre ces deux franges : $z_{n+1} - z_n = d_i = \frac{d\lambda}{a}$.
9. Le premier maximum en dehors du centre O se trouve en $z = d_i \approx 0{,}5\,\mathrm{mm}$.

Solution de l'exercice 14

1. $s_0(x,t) = a_0 \cos(\omega t - kx)$.
2. $s_1(x,t) = -ra_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$, $s_2(x,t) = rr'a_0 \cos(\omega t - kx - 2kL)$ et $s_3(x,t) = -r^2r'a_0 \cos(\omega t + kx - 4kL)$
3. Condition $kL = n\pi$, s_1 et s_3 sont également en phase.
4. $P(rr') = \sum_{i=0}^{n} (rr')^i$.
5. $A_{max} = a_0 \frac{1+r}{1-rr'}$.
6. $A_{min} = a_0 \frac{1-r}{1-rr'}$.
7. $r' = 1$ et $r = 9/11$.

Solution de l'exercice 15

1. Voir l'exercice 8 pour le calcul de la différence de marche $\delta = ay/D + ax/L$.
2. $\Delta\varphi = k\delta$.
3. $I_Y = 2J_Y + 2J_Y \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ay}{D} + \frac{ax}{L}\right)\right)$.
4. $I_{tot} = 4J + 4J \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{ae}{D}\right)$.
5. $i = \lambda L/a$.
6. $v = \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda D}e\right)$.
7. $e = 2{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} = 2,6\times$ distance Terre-Soleil.

Solution de l'exercice 16

1. Simplement $[E] = [F]/S = MLT^{-2}/L2 = ML^{-1}T^{-2}$.
2. La solution présente un découplage des variables d'espace et de temps, c'est une onde stationnaire. Ce type d'onde apparaît dans une structure lorsque des conditions aux limites sont présentes.
3. L'équation différentielle vérifiée par g est celle d'un oscillateur harmonique, la solution s'écrit donc :
$$g(t) = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t);$$
avec $\omega^2 = \alpha$.
4. Calculons pour cela les dérivées successives de la solution $f(x)$ proposée :
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -A\beta \sin(\beta x) + B\beta \cos(\beta x) + C\beta \sinh(\beta x) + D\beta \cosh(\beta x) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -A\beta^2 \cos(\beta x) - B\beta^2 \sin(\beta x) + C\beta^2 \cosh(\beta x) + D\beta^2 \sinh(\beta x) \\ \dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} = A\beta^3 \sin(\beta x) - B\beta^3 \cos(\beta x) + C\beta^3 \sinh(\beta x) + D\beta^3 \cosh(\beta x) \\ \dfrac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = A\beta^4 \cos(\beta x) + B\beta^4 \sin(\beta x) + C\beta^4 \cosh(\beta x) + D\beta^4 \sinh(\beta x) = \beta^4 f(x). \end{cases}$$
$f(x)$ est donc solution si :
$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} - \alpha\frac{\rho S}{IE} f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\beta^4 f(x) - \alpha\frac{\rho S}{IE} f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\beta^4 = \alpha\frac{\rho S}{IE} \\ \Leftrightarrow &\beta = \left(\alpha\frac{\rho S}{IE}\right)^{1/4} = \left(\omega^2\frac{\rho S}{IE}\right)^{1/4}. \end{aligned}$$
5. L'utilisation des conditions aux limites donne quatre équations :
$$\begin{cases} y(0,t) = g(t)(A + C) = 0 \\ y(L,t) = g(t)(A\cos(\beta L) + B\sin(\beta L) + C\cosh(\beta L) + D\sinh(\beta L)) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(0,t) = g(t)(-A\beta^2 + C\beta^2) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(L,t) = g(t)(-A\beta^2 \cos(\beta L) - B\beta^2 \sin(\beta L) + C\beta^2 \cosh(\beta L) + D\beta^2 \sinh(\beta L)) = 0 \end{cases}$$
La première et la troisième équation $A + C = 0$ et $-A + C = 0$ amènent à $A = C = 0$.
La deuxième et la quatrième équation $B\sin(\beta L) + D\sinh(\beta L) = 0$ et $-B\beta^2 \sin(\beta L) + D\beta^2 \sinh(\beta L) = 0$. On élimine la solution triviale $B = D = 0$ (qui amène à $y(x,t) = 0$). L étant différent de 0 $\sinh(\beta L)$ ne peut pas s'annuler donc on prend $D = 0$ et on en déduit que $\sin(\beta L) = 0$ d'où $\beta_n L = n\pi$.
6. D'après la question précédente $\beta_n = n\pi/L = \left(\omega_n^2 \frac{\rho S}{IE}\right)^{1/4}$. Finalement :
$$\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$
7. Finalement :
$$y(x,t) = (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)) \times B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$
Tous les modes représentés respectent les deux premières conditions aux limites, par contre certains modes montrent une dépendance de y avec z (mode b, d, g et h) ce qui n'est pas possible avec notre modèle.
Parmi les quatre cas restants, on compte le nombre de ventre entre les deux nœuds des extrémités :
   - mode a : un ventre au centre donc $n = 1$;

- mode c : deux ventres donc $n = 2$;
- mode e : trois ventres donc $n = 3$;
- mode f : quatre ventres donc $n = 4$.

8. Les applications numériques donnent le tableau suivant :

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$L_1 = 70\,\text{m}$	0,5 Hz	2,0 Hz	4,5 Hz	8,0 Hz
$L_2 = 144\,\text{m}$	0,12 Hz	0,47 Hz	1,1 Hz	1,9 Hz
$L_3 = 108\,\text{m}$	0,21 Hz	0,84 Hz	1,9 Hz	3,4 Hz

9. Le mode 1 ne peut pas apparaître par forçage avec la marche des piétons. Le mode 2 peut apparaître dans la travée de 70 m, le mode 3 dans la travée de 108 m et le mode 4 dans la travée de 144 m et aussi celle de 70 m par l'intermédiaire de la troisième harmonique générée par la marche des piétons.
10. Dans cette question, il suffit d'inverser les rôles de h et b :

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$L_1 = 70\,\text{m}$	1,9 Hz	7,5 Hz	16,8 Hz	30 Hz
$L_2 = 144\,\text{m}$	0,44 Hz	1,8 Hz	4,0 Hz	7,1 Hz
$L_3 = 108\,\text{m}$	0,79 Hz	3,1 Hz	7,1 Hz	12,6 Hz

Le mode 1 peut apparaître dans la travée de 70 m par l'intermédiaire de la première harmonique (la 29^e^risque d'être trop faible pour faire apparaître le mode 4). Le mode 2 peut apparaître dans la travée de 108 m par l'intermédiaire de la deuxième harmonique. Seul le mode 3 peut apparaître dans la travée de 144 m par l'intermédiaire de la troisième harmonique.