Corrigé

Plan de travail n° 1
Solutions et corrigés

Sciences-physiques MPSI$_3$

I Analyse dimensionnelle

Solution de l'exercice 1

1. $kg \cdot m \cdot s^{-2}$;
2. $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$;
3. $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$.

Solution de l'exercice 2

Calculons la dimension de la pression P en fonction des sept grandeurs de base :

$$[P] = [Force] \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}.$$

Calculons la dimension d'une énergie par unité de volume :

$$[Energie] \cdot L^{-3} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot L^{-3} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}.$$

Ces deux termes ont bien la même dimension.

Solution de l'exercice 3

$[R] = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$.

Solution de l'exercice 4

1. $f = R \cdot \eta \cdot V$. R étant le rayon de l'objet.
2. Pour le grain de sable : v est de l'ordre du $mm \cdot s^{-1}$ et pour la bulle $v \approx 10\,cm \cdot s^{-1}$.

Solution de l'exercice 5

On utilise la loi indiquée dans l'énoncé :

$$f = kP^\alpha \rho^\beta S^\gamma.$$

Soit :

$$T^{-1} = (MLT^{-2})^\alpha (ML^{-3})^\beta (L^2)^\gamma = M^{\alpha+\beta} L^{\alpha-3\beta+2\gamma} T^{-2\alpha}.$$

D'où le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3\beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = -1 \end{array}\right.$$

Finalement $f = k\frac{1}{S}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$.

1. Pour le premier papillon $f_1 = k\frac{1}{S_1}\sqrt{\frac{P_1}{\rho}}$ et pour le second $f_2 = k\frac{1}{S_2}\sqrt{\frac{P_2}{\rho}}$ donc $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\frac{S_1}{S_2}$.
   L'application numérique donne $f_2 \approx 20\,Hz$.

Solution de l'exercice 6

1. $E = h\nu$ donc $h = \frac{E}{\nu}$ et $[h] = [E][\nu]^{-1}$, or $[E] = [mv^2] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ et $\nu = T^{-1}$ donc :

$$[h] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot T = M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \Rightarrow kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}.$$

2. $i = Q/t$ donc $Q = i \times t$, $[Q] = I \cdot T \Rightarrow \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$.
3. À partir de la dimension de la force $[F] = [ma] = M \cdot L \cdot T^-2$ et de $[\epsilon_0] = \frac{[Q]^2}{[F]L^2}$, on trouve :

$$[\epsilon_0] = I^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-3} \Rightarrow \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^4/\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3.$$

4.

$$\begin{aligned}
&[r] = [k][e]^\alpha[m]^\beta[h]^\gamma[\epsilon_0]^\delta \\
&L = (I \cdot T)^\alpha M^\beta (M \cdot L^2 \cdot T^{-1})^\gamma (I^2 \cdot T^4 \cdot M^{-1} \cdot L^{-3})^\delta \\
&L = I^{\alpha+2\delta} T^{\alpha-\gamma+4\delta} M^{\beta+\gamma-\delta} L^{2\gamma-3\delta}
\end{aligned}$$

   Ceci nous amène à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} 1 & = 2\gamma - 3\delta \\ 0 & = \alpha + 2\delta \\ 0 & = \alpha - \gamma + 4\delta \\ 0 & = \beta + \gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

5. Application numérique $r \approx 1{,}7 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$

Solution de l'exercice 7

1. a) Comme $P = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$, cela permet d'écrire $[P] = [E] \cdot T^{-1}$.
   b) On en déduit :

$$[q] = [P] \cdot L^{-2} = M \cdot T^{-3}.$$

2. En écrivant l'équation aux dimensions, on trouve :

$$[q] = [\lambda]\Theta \cdot L^{-1}.$$

   On en déduit :

$$[\lambda] = M \cdot L \cdot \Theta^{-1} \cdot T^{-3}.$$

3. Toujours en passant à l'équation aux dimensions :

$$M \cdot L^{-3}[C_p]\Theta \cdot T^{-1} = M \cdot L \cdot \Theta^{-1} \cdot T^{-3} \cdot \Theta \cdot L^{-2}.$$

   On isole $[C_p]$ et cela donne :

$$[C_p] = L^2 \cdot \Theta^{-1} \cdot T^{-2}.$$

4. Il faut tout d'abord obtenir la dimension de D, pour cela on utilise le fait que l'argument de l'exponentielle est sans dimension :

$$L^2 = [D] \cdot T \Leftrightarrow [D] = L^2 \cdot T^{-1}.$$

   On en déduit la dimension de A :

$$[A] = [q]([D] \cdot T)^{1/2} \Leftrightarrow [A] = M \cdot L \cdot T^{-3}.$$

   On trouve alors l'équation aux dimensions suivantes :

$$\begin{aligned}
M \cdot L \cdot T^{-3} =& \Theta^\alpha (M \cdot L \cdot \Theta^{-1} \cdot T^{-3})^\beta (M \cdot L^{-3})^\gamma (L^2 \cdot \Theta^{-1} \cdot T^{-2})^\delta \\
\Leftrightarrow M \cdot L \cdot T^{-3} =& \Theta^{\alpha-\beta-\delta} M^{\beta+\gamma} L^{\beta-3\gamma+2\delta} T^{-3\beta-2\delta}
\end{aligned}$$

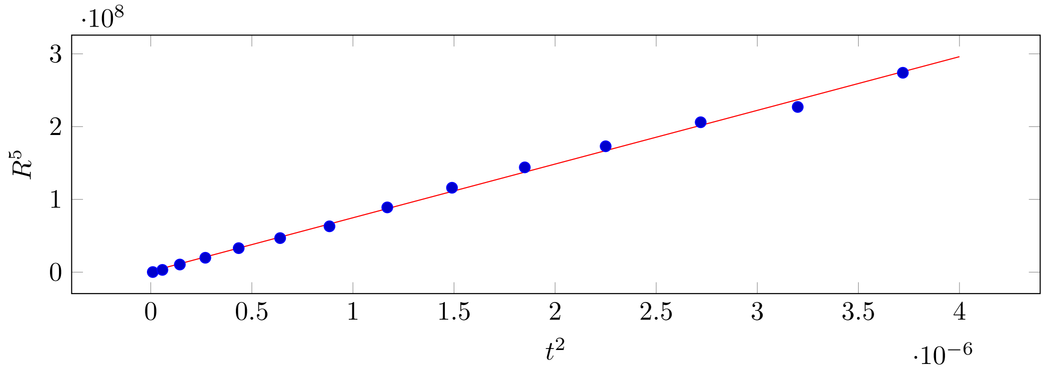
   On en déduit :

$$\begin{cases} 1 &= \beta + \gamma \\ 1 &= \beta - 3\gamma + 2\delta \\ -3 &= -3\beta - 2\delta \\ 0 &= \alpha - \beta - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \gamma &= 0 \\ \beta &= 1 \\ \delta &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{cases}$$

La relation s'écrit donc $A = a(T_0 - T_S)\lambda$.

Solution de l'exercice 8

Le technique habituelle donne le résultat suivant : $E = k \cdot \rho \cdot R^5 \cdot t^{-2}$. Pour vérifier si les photographies de l'explosions suivent cette loi, on trace R^5 en fonction de t^2 :



La pente de la droit obtenue est $p = 7{,}4 \times 10^{13}$, on en déduit $E = p\rho \approx 8 \times 10^{13}$ J.

II L'équilibre chimique

Solution de l'exercice 1

$C_6H_{14} + \frac{19}{2}O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 7H_2O$

Solution de l'exercice 2

L'espèce Na_2SO_4 se dissout totalement dans l'eau selon le bilan :

$$Na_2SO_4 \longrightarrow 2Na^+ + {SO_4}^{2-}.$$

Ainsi $a(Na^+) = [Na^+]/c^o = \frac{2e-2}{0.3} = 6{,}7 \times 10^{-2}$ et $a{SO_4}^{2-}) = [{SO_4}^{2-}]/c^o = \frac{1e-2}{0.3} = 3{,}3 \times 10^{-2}$. Le cuivre est un solide donc $a(Cu) = 1$. L'activité de O_2 est égale à sa pression partielle et comme le dioxygène représente environ 20% de l'atmosphère : $a(O_2) = 0.2$.

Solution de l'exercice 3

On utilise la définition du quotient réactionnel :

$$Q_R = \frac{\left(\frac{P_{O_2}}{P^o}\right)^5 \left(\frac{[Mn^{2+}]}{c^o}\right)^4}{\left(\frac{[{MnO_4}^-]}{c^o}\right)^4 \left(\frac{[H^+]}{c^o}\right)^{12}} = \frac{(0.2)^5 \times (2{,}4 \times 10^{-3})^4}{6 \times 10^{-24} \times (10^{-5.2})^{12}} \approx 2 \times 10^{53}.$$

Solution de l'exercice 4

La constante d'équilibre est égale au quotient réactionnel lorsque l'équilibre est atteint :

$$K = \frac{1.7e - 3 \times 1{,}41 \times 10^{-2}}{1} = 2{,}4 \times 10^{-5}.$$

Solution de l'exercice 5

Il suffit de faire un tableau d'avancement pour voir que :

- $n(Na_{(s)}) = 0.2 - 5e - 2 = 0{,}15\,\text{mol}$;
- $n(HO^-) = 1 \times 10^{-9} \times V + 5 \times 10^{-2} \approx 5 \times 10^{-2}\,\text{mol}$;

- $n(\mathrm{Na}^+) = 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$;
- $n(\mathrm{H_2}) = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.

Solution de l'exercice 6

1. On calcule le quotient réactionnel et on le compare à K :
$$Q_R = \frac{1{,}7 \times 10^{-3} \times (2{,}4 \times 10^{-3})^2}{1} = 9{,}8 \times 10^{-9} > K,$$
dans ce cas la réaction se déroule en sens inverse.
2. $$Q_R = \frac{4{,}7 \times 10^{-3} \times (1{,}2 \times 10^{-3})^2}{1} = 6{,}8 \times 10^{-9} < K,$$
dans ce cas la réaction se déroule en sens direct.
Si $\mathrm{PbI_{2(s)}}$ n'est pas présent initialement, alors il ne se passe rien, on a affaire à un cas de rupture d'équilibre.

Solution de l'exercice 7

On calcule le quotient réactionnel, si l'équilibre est atteint, il doit être égal à la constante d'équilibre :
$$Q_R = \frac{(1{,}08 \times 10^{-2})^2}{1{,}56 \times 10^{-2} \times (4{,}58 \times 10^{-2})^2} \approx 3,56 \neq K.$$
Le système n'est donc pas à l'équilibre.

Solution de l'exercice 8

1. On commence par faire le tableau d'avancement :

$\mathrm{SO_{2(g)}}$	+	$\mathrm{H_2O_{(l)}}$	$\rightleftharpoons$	$\mathrm{HSO_3{}^-{}_{(aq)}}$	+	$\mathrm{H^+_{(aq)}}$
cte		cte		0		0
cte		cte		ξ_{eq}		ξ_{eq}

On remarque alors que $[\mathrm{HSO_3{}^-}]_\mathrm{eq} = [\mathrm{H^+}]_\mathrm{eq}$, donc à l'équilibre :
$$K = \frac{[\mathrm{HSO_3{}^-}]_\mathrm{eq} \times [\mathrm{H^+}]_\mathrm{eq}}{(c^o)^2 \times P_{\mathrm{SO_2}}/P^o} = \frac{([\mathrm{HSO_3{}^-}]_\mathrm{eq})^2}{(c^o)^2 \times P_{\mathrm{SO_2}}/P^o}.$$
On isole $[\mathrm{HSO_3{}^-}]_\mathrm{eq}$:
$$[\mathrm{HSO_3{}^-}]_\mathrm{eq} = \sqrt{KP_{\mathrm{SO_2}}(c^o)^2/P^o} \approx 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}.$$

2. Dans le cas d'une réaction totale, le bilan se fait facilement :
$$[\mathrm{H^+}] = [\mathrm{Cl^-}] = \frac{0.35}{0.3} \approx 1{,}17\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}.$$

Solution de l'exercice 9

1. a) $\xi = 0{,}5\,\mathrm{mol}$.
   b) $\xi = 0{,}6\,\mathrm{mol}$.
2. a) $\xi = 1{,}97\,\mathrm{mol}$.
   b) $m_{min} = 23{,}5\,\mathrm{mol}$.
   c) $P = \left(5,0 + \frac{\xi_1}{2} - \frac{\xi_2}{2}\right)\frac{RT}{V}$

Solution de l'exercice 10

1. $[\mathrm{H_2S_{(aq)}}] = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.
2. $K = \frac{[\mathrm{DEAH^+}][\mathrm{HS^-}]}{[\mathrm{DEA}][\mathrm{H_2S}]} = \frac{K_2}{K_1} = 100.$

3. On peut réaliser un bilan global de la dissolution de $H_2S_{(g)}$ dans l'eau :

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_2S_{(g)} & \rightleftharpoons & H_2S_{(aq)} & & & K_{H_2S} \\ DEA_{(aq)} & + & H_2S_{(aq)} & \rightleftharpoons & DEAH_{(aq)}{}^{+} & + & HS_{(aq)}{}^{-} & K \\ \hline H_2S_{(g)} & + & DEA_{(aq)} & \rightleftharpoons & DEAH_{(aq)}{}^{+} & + & HS_{(aq)}{}^{-} & KK_{H_2S} = 10 \end{array}$$

On passe d'une constante de réaction de dissolution qui vaut 0,1 à une qui vaut 10, la présence de la DHEA permet une élimination plus efficace du H_2S présent dans le biogaz.

Solution de l'exercice 11

1. a) $m_{min} = d \cdot \rho \cdot V \dfrac{23}{100} = 264{,}5\,\text{g}$.
   b) i – $HCl + H_2O \longrightarrow H_3O^+ + Cl^-$.
   c) L'espèce acide présente est l'ion H_3O^+.
2. $[H_3O^+] = [Cl-] = 7{,}25\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
3. a) $[H_3O^+] = \dfrac{C_0V_0 - C_bV_b}{V_0 + V_b}$.
   b) $[H_3O^+] = \dfrac{C_b(V_{beq} - V_b)}{V_0 + V_b}$.
   c) i – Réponse évidente.
   ii – La courbe $F(V_b)$ est donc une droite de pente $-C_b$ et d'ordonnée à l'origine C_bV_{beq}.
   iii – Pour obtenir le volume à l'équivalence il suffit de tracer cette droite et de trouver son intersection avec l'axe des abscisses, $F(V_{beq}) = 0$. L'abscisse de ce point d'intersection donne V_{beq}.
   d) On obtient graphiquement $V_{beq} = 15,6$ mL.
   e) On a : $C_0 = \dfrac{C_bV_{beq}}{V_0} = 1{,}56 \times 10^{-2}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
   f) $C_{com} = 500 \times C_0 = 7{,}8\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
   g) $m = M \cdot C_{com} = 284{,}7\,\text{g}$.
   h) $\dfrac{M \cdot C_{com}}{d} = 24,7\%$. L'indication sur la bouteille est donc correcte.

Solution de l'exercice 12

1. Sous forme de $HPO_4{}^{2-}$.
2. $K \approx 0,04$.
3. $n_1 \approx 2{,}1\,\text{mol}$.
4. a) $[Mg^{2+}] = 5{,}5 \times 10^{-3}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
   b) $n_2 = 45{,}5\,\text{mol}$.
   c) Cela se vérifie en effet.

Solution de l'exercice 13

1. c.f. le cours.
2. On calcule le quotient réactionnel et on le compare à K :

   cas a : $Q_R = a(O_2) = \dfrac{nRT}{VP^o} \approx= 0,108 < K$, la réaction se déoule donc en sens direct ;

   cas b : $Q_R = a(O_2) = \dfrac{nRT}{VP^o} \approx= 0,216 > K$, la réaction se déoule donc en sens inverse.
3. Supposons l'équilibre chimique atteint dans le cas a :

$$\begin{array}{ccccc} 4\,CuO & \rightleftharpoons & 2Cu_2O & + & O_2 \\ n_0 & & n_1 & & n \\ n_0 - 4\xi_{eq} & & n_1 + 2\xi_{eq} & & n + \xi_{eq} \end{array}$$

   La condition d'équilibre s'écrit :

$$\frac{(n + \xi_{eq})RT}{VP^o} = K \Leftrightarrow \xi_{eq} = \frac{KVP^0}{RT} - n \approx 8{,}5 \times 10^{-3}\,\text{mol}.$$

   Pour savoir s'il n'y a pas de rupture d'équilibre, on calcule la quantité finales de CuO : $n_f(\text{CuO}) = n_0 - 4\xi_{eq} = 6{,}6 \times 10^{-2}\,\text{mol}$.
   Supposons l'équilibre chimique atteint dans le cas b :

$$\begin{array}{ccccc} 4\,\mathrm{CuO} & \rightleftharpoons & 2\mathrm{Cu_2O} & + & \mathrm{O_2} \\ n_0 & & n_1 & & n \\ n_0-4\xi_{eq} & & n_1+2\xi_{eq} & & n+\xi_{eq} \end{array}$$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\frac{(n+\xi_{eq})RT}{VP^o} = K \Leftrightarrow \xi_{eq} = \frac{KVP^0}{RT} - n \approx -2{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{mol}.$$

Pour savoir s'il n'y a pas de rupture d'équilibre, on calcule la quantité finales de Cu_2O : $n_f(\mathrm{CuO}) = n_1+2\xi_{eq} = -2{,}0\times10^{-3}$ mol. Ce nombre étant négatif, il y a rupture d'équilibre et on doit considérer la réaction comme totale (en sens inverse) donc $n_f(\mathrm{Cu_2O}) = 0\,\mathrm{mol}$, $n_f(\mathrm{CuO}) = 0{,}206\,\mathrm{mol}$ et $n_f(\mathrm{O_2}) = 1{,}8\times10^{-2}\,\mathrm{mol}$.

Solution de l'exercice 14

1. Le quotient réactionnel vaut $Q_0 = \dfrac{P_0(\mathrm{Br_2})\times P_0(\mathrm{CO})}{P_0(\mathrm{COBr_2})} = \dfrac{n_0(\mathrm{Br_2})n_0(\mathrm{CO})}{n_{tot}n_0(\mathrm{COBr_2})} = 10$. $Q_0 > K$ donc la réaction se déroule en sens indirect.
2. Tableau d'avancement :

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{CO_{(g)}} & +\mathrm{Br_{2(g)}} & \rightleftharpoons \mathrm{COBr_{2(g)}} \\ t=0 & 2 & 2,2 & 0,2 \\ t_{eq} & 2-x_f & 2,2-x_f & 0,2+x_f \end{array}$$

Attention, ici $K' = 1/K$ car on considère la réaction en sens inverse.
À l'équilibre $K' = Q_r(t_{eq}) = \dfrac{P_f(\mathrm{COBr_2})P^o}{P_f(\mathrm{CO})P_f(\mathrm{Br_2})} = \dfrac{n_{tot}n_f(\mathrm{COBr_2})P^o}{n_f(\mathrm{Br_2})n_f(\mathrm{CO})P_{tot}}$ ce qui amène à la résolution de l'équation :

$$0,2 = \frac{(4,4-x_f)(0,2+x_f)}{(2,2-x_f)(2-x_f)\times 2}.$$

La résolution numérique de cette équation donne comme solution $x_f \approx 0{,}155$ mol. On en déduit :

$$\begin{cases} n_f(\mathrm{CO}) = 1{,}845\,\mathrm{mol} \\ n_f(\mathrm{Br_2}) = 2{,}045\,\mathrm{mol} \\ n_f(\mathrm{COBr_2}) = 0{,}355\,\mathrm{mol} \end{cases}$$

3. On garde l'équation précédente en changeant la valeur de n_{tot}. On a alors $Q_0 = 2 < K$, la réaction se déroule en sens direct.
4. La méthode est identique, on considère la réaction en sens direct et on utilise la relation à l'équilibre pour obtenir finalement l'équation suivante :

$$5 = \frac{(2+x_f)(2,2+x_f)\times 2}{(22+x_f)(0,2-x_f)}.$$

Une résolution numérique donne $x_f \approx 0{,}112$ mol d'où :

$$\begin{cases} n_f(\mathrm{Ar}) = 17{,}6\,\mathrm{mol} \\ n_f(\mathrm{CO}) = 2{,}112\,\mathrm{mol} \\ n_f(\mathrm{Br_2}) = 2{,}312\,\mathrm{mol} \\ n_f(\mathrm{COBr_2}) = 0{,}088\,\mathrm{mol} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 15

1. $\mathrm{H_2O} \rightleftharpoons \mathrm{H_2} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2}$.
2. $P(\mathrm{H_2O}) = 9{,}9\times10^4$ Pa, $P(\mathrm{H_2}) = 22$ Pa et $P(\mathrm{O_2}) = 11$ Pa.
3. $K_1 = 2{,}3\times10^{-6}$.
4. $\mathrm{CO_2} \rightleftharpoons \mathrm{CO} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2}$.
5. $P(\mathrm{H_2O}) = 9{,}9\times10^4$ Pa, $P(\mathrm{CO}) = 48$ Pa et $P(\mathrm{O_2}) = 24$ Pa.

6. $K_2 = 7{,}4 \times 10^{-6}$.
7. $K_3 = K_1/K_2 = 0,31$.
8. $\xi_{eq} = 0{,}185\,\text{mol}$.

Solution de l'exercice 16

1. a) $P_0 = 2{,}49 \times 10^6\,\text{Pa}$.
   b) $P_T = P_0$.
   c) $K_1 = \dfrac{(P_{\text{H}_2})^2}{(P_T - 2P_{\text{H}_2})^2} \approx 2{,}74 \times 10^{-2}$.
   d) $\alpha = \dfrac{2P_{\text{H}_2}}{P_T} \approx 24,9\%$.
   e) $Q > K$, le système évolue en sens indirect.
2. a) $K_2 = \dfrac{P_1^2}{4(P^o)^2} = 1$.
   b) La pression augmente.

III L'oscillateur harmonique

Solution de l'exercice 1

1. c.f cours.
2. 1. oui si $\alpha < 0$
   2. non.
   3. oui si $\alpha = 0$ et $\gamma/\beta > 0$.
   4. oui si $i = x + cte$ et $a = 0$.
   5. non.
   6. oui en notant $x = \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Solution de l'exercice 2

1. On trouve $x(t) = (x_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \ell_0$.
2. On trouve alors $x = x_{eq} = \ell_0$.

Solution de l'exercice 3

L'amplitude est $x_0 = 2{,}7\,\text{cm}$, la phase est $\varphi = 0{,}58\,\text{rad}$, la périodes est $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}5\,\text{s}$ et $w = 4{,}2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

L'amplitude vaut $x_0 = \sqrt{5.3^2 + 3.8^2} \approx 6{,}5\,\text{cm}$, la phase est telle que $\tan\varphi = -3.1/5.3 \approx 0{,}58\,\text{rad}$, la période $T = 1{,}65\,\text{s}$ et $\omega = 3{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Solution de l'exercice 4

On calcule l'énergie mécanique initiale $E_m(0) = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + \dfrac{1}{2}k(x_0 - \ell_0)^2 \approx 5{,}6 \times 10^{-3}\,\text{J}$. On fait de même à un instant t quelconque :

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t))^2 + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}m(A^2\omega^2\sin^2(\omega t) + B^2\omega^2\cos^2(\omega t) - mAB\omega^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)) \\
&+ \frac{1}{2}k(A^2\cos^2(\omega t + B^2\sin^2(\omega t) + kAB\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\
&= \cos^2(\omega t)\left(\frac{mB^2\omega^2}{2} + \frac{kA^2}{2}\right) + \sin^2(\omega t)\left(\frac{mA^2\omega^2}{2} + \frac{kA^2}{2}\right) + \cos(\omega t)\sin(\omega t)\left(-mAB\omega^2 + kAB\right)
\end{aligned}$$

Or $\omega^2 = k/m$ d'où :

$$E_m = \left(\frac{kB^2 + kA^2}{2}\right)(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \frac{kB^2 + kA^2}{2} \approx 5{,}6 \times 10^{-3}\,\text{J}.$$

Son résultat est bien cohérent avec la conservation de l'énergie mécanique.

Solution de l'exercice 5

$$\begin{cases} \omega & = 1{,}57\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ A & = 10\,\mathrm{cm} \\ x_e & = 40\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6

De gauche à droite et de haut en bas :

$$\vec{F} = -k(x-\ell_0)\vec{u}_x$$
$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x$$
$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x$$
$$\vec{F} = -k(x+\ell_0)\vec{u}_x$$

Solution de l'exercice 7

1. C'est bien une solution de l'équation différentielle.
2. On obtient :

$$\begin{cases} A & = x_0 \\ B & = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 8

1. $k = \dfrac{mg}{z_{eq}} = 9{,}8\times10^{-2}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 Z = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3. $z = -\dfrac{mg}{k}\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \dfrac{mg}{k}$.
4. $f = 5\,\mathrm{Hz}$.
5. $E_{pe} = \dfrac{1}{2}kz^2$.
6. $\dfrac{1}{2}kz_{max}^2 - mgz_{max} - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = 0$.
7. $z_{max} = 4{,}3\,\mathrm{cm}$.

Solution de l'exercice 9

Association série : ressort équivalent $k/2$ et $2\ell_0$.
Association parallèle : ressort équivalent $2k$ et ℓ_0.
Généralisation $k_{eq} = k_1 + k_2$ en parallèle et $\dfrac{1}{k_{eq}} = \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_2}$ en série.

Solution de l'exercice 11

1. La longueur du ressort est égale à $x_B - x_A$ (d'après le schéma). La force $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ d'après la troisième loi de Newton :

$$\begin{cases} \vec{F}_A & = k(x_B - x_A - \ell_0)\vec{e}_x \\ \vec{F}_B & = -k(x_B - x_A - \ell_0)\vec{e}_x \end{cases}$$

2. On fait comme demandé dans la question :

$$\begin{cases} m_A\dfrac{\mathrm{d}^2x_A}{\mathrm{d}t^2} & = k(x_B - x_A - \ell_0) \\ m_B\dfrac{\mathrm{d}^2x_B}{\mathrm{d}t^2} & = -k(x_B - x_A - \ell_0) \end{cases}$$

3. On utilise les deux relations $m_A x_A + m_B x_B = 0$ et $X = x_B - x_A$, on en déduit :

$$\begin{aligned} & m_A x_A + m_B(X + x_A) = 0 \\ & x_A(m_A + m_B) = -m_B X \\ & x_A = -\frac{m_B}{m_A + m_B} X. \end{aligned}$$

   On fait de même pour x_B.
4. On remplace x_A et x_B par leur expression en fonction de X dans une des équations différentielles :

$$\begin{aligned} & -m_A \frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = k\,(X - \ell_0) \\ & \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + kX = k\ell_0 \\ & \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{\mu} X = \frac{k}{\mu} \ell_0 \end{aligned}$$

5. L'énergie transmise à l'atome d'hydrogène lui a donnée une énergie cinétique donc :

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = E_t.$$

   Donc :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_t}{m_A}}.$$

   Application numérique : $v_0 = 347\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
6. D'après le cours, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_0.$$

   Initialement $\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = v_0 = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ et $X(0) = \ell_0$ (initialement la molécule est à l'équilibre). On en déduit :

$$\begin{cases} \ell_0 & = A + \ell_0 \\ v_0 & = B\omega_0 \end{cases}$$

   finalement la solution s'écrit :

$$X = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \ell_0.$$

7. $x_A = -m_B(m_A + m_B)X$ et $x_B = m_A/(m_A + m_B)X$.
8. On trouve $\lambda = cT = c/f = 3{,}35 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, on se trouve dans le domaine des micro-ondes.
9. D'après les questions précédentes :

$$k = m_A(2\pi f_0)^2 = 5{,}11 \times 10^5\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

   Cette valeur est très largement supérieure à la raideur des ressorts classiques (5 et $10\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ en TP).
10. X est maximum lorsque le sinus vaut 1 d'où :

$$X_{max} = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0}$$

   Application numérique :

$$X_{max} = 1{,}28 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Solution de l'exercice 12

1. a) On trouve $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.
   b) $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.
   c) En dérivant par rapport au temps, on retrouve l'équation différentielle vérifiée par x.
   d) $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$.
   e) $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$.
2. a) $[\alpha] = L$.
   b) Il suffit de faire attention au sens de la force (ressort étiré).
   c) On trouve $|x| < \alpha$ pour que l'équilibre s'établisse.
   d) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \alpha$.
   e) $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$.
   f) $x = \alpha + (x_0 - \alpha)\cos(\omega t)$.
   g) $T_1 = \pi/\omega$.
   h) $x_1 = 2\alpha - x_0$.
   i) $\alpha < x_0 < 3\alpha$.

Solution de l'exercice 13

1.
$$\begin{cases} \text{hauteur de la pointe} \approx 20\,\mu\text{m} \\ \text{largeur du levier} \approx 80\,\mu\text{m} \\ \text{épaisseur du levier} \approx 4\,\mu\text{m} \end{cases}$$

2. $E = \dfrac{4L^3}{z_{eq}ae^3}F_{ext} \Rightarrow [E] = \dfrac{L^3}{L^5}F_{ext} = ML^{-1}T^{-2}$.
3. On applique le principe fondamentale de la dynamique au système constitué du point matériel M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
   Bilan des forces :
$$\begin{cases} \vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -kz\vec{u}_z \\ \vec{F}_{ext} = F_{ext}\vec{e}_z \\ \text{poids négligeable} \end{cases}$$

   À l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$ donc :
$$\begin{aligned} &\vec{F}_r + \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \Rightarrow &- kz_{eq} + F_{ext} = 0 \\ \Rightarrow &z_{eq} = \frac{F_{ext}}{k} \end{aligned}$$

   Or $z_{eq} = \dfrac{4L^3}{Eae^3}$ par identification donc $k = \dfrac{Eae^3}{4L^3}$.
4. A.N. : $k = 16\,\text{N/m}$.
5. Le principe fondamental de la dynamique appliqué hors-équilibre donne $\vec{F}_r = m\vec{a}$ d'où $-kz\vec{e}_z = m\ddot{z}\vec{e}_z$ et finalement $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$.
6. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2$.
7. Pas de frottements donc l'énergie mécanique est constante et sa dérivée par rapport au temps est nulle :
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}(t) = 0 = \frac{1}{2} \times 2m\dot{z}\ddot{z} + \frac{1}{2} \times 2kz\dot{z} \text{ d'où } \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0.$$

8. La solution s'écrit $z = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Les deux conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = v_0$ permettent de déterminer les expressions de A et B. On obtient finalement :

$$z(t) = z_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

9. $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 64\,\text{kHz}$.
10. Nouveau bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{F}_r = -kz\vec{e}_z \\ \vec{F}'_r = k'(\ell' - \ell_0)\vec{e}_z \end{cases}$$

À l'équilibre $\vec{F}_r + \vec{F}'_r = \vec{0}$ d'où $-kz_{eq} + k'(\ell' - \ell_0) = 0$ or $\ell' = h - z$ d'où après calculs :

$$z_{eq} = \frac{k'(h - \ell_0)}{k + k'}.$$

11. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} &\vec{F}_r + \vec{F}'_r = m\vec{a} \\ &-kz + k'(h - z - \ell_0) = m\ddot{z} \\ &\ddot{z} + \frac{k + k'}{m}z = \frac{k'}{m}(h - \ell_0) \end{aligned}$$

12. On pose $Z = z - z_{eq}$ et après calculs, on trouve $\ddot{Z} + \dfrac{k + k'}{m}Z = 0$.
13. La solution s'écrit $Z(t) = A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t)$, avec $\omega' = \dfrac{k + k'}{m}$, d'où $z(t) = A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t) + z_{eq}$. En utilisant les conditions initiales $z(0) = z_{eq}$ et $\dot{z}(0) = v_0$, on trouve finalement :

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega'}\sin(\omega' t) + z_{eq}.$$

14. $f' = \dfrac{\omega'}{2\pi}$ ce qui amène après calculs à $f' = f\sqrt{1 + \dfrac{k'}{k}} > f$, la fréquence augmente.
15. A.N. : $f' \approx 82\,\text{kHz}$ soit une variation relative de $\dfrac{f' - f}{f} \approx 28\%$ aisément détectable.

Solution de l'exercice 14

1. On applique le principe fondamental de la dynamique au système constitué du point matériel M_1 dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0} \\ \vec{F}_{r_{gauche}} = -k(AM_1 - \ell_0)\vec{u}_x = -kx_1\vec{u}_x \\ \vec{F}_{droite} = -k(M_1m_2 - \ell_0) = k(x_2 - x_1)\vec{u}_x \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{r_{gauche}} + \vec{F}_{r_{droite}} \\ \Leftrightarrow &m_1\ddot{x}_1\vec{u}_x = -kx_1\vec{u}_x + k(x_2 - x_1)\vec{u}_x \\ \Leftrightarrow &\ddot{x}_1 = \frac{k}{m}(x_2 - 2x_1) = \omega_0^2(x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

2. De même :

$$
\begin{aligned}
m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_{r_{gauche}} + \vec{F}_{r_{droite}} \\
Leftrightarrow m_2\ddot{x}_2\vec{u}_x &= -k(M_1M_2 - \ell_0)\vec{u}_x + k(M_2B - \ell_0)\vec{u}_x \\
\Leftrightarrow m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) + k(-x_2) \\
\Leftrightarrow \ddot{x}_2 &= \frac{k}{m}(x_1 - 2x_2) = \omega_0^2(x_1 - 2x_2)
\end{aligned}
$$

3. On reporte les solutions dans la première équation :

$$
\begin{aligned}
&- A\omega^2\cos(\omega t) = \omega_0^2(B\cos(\omega t) - 2A\cos(\omega t)) \\
\Leftrightarrow &- A\omega^2 = \omega_0^2(B - 2A) \\
\Leftrightarrow &B = A\left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \\
\Leftrightarrow &B = A(2 - \lambda)
\end{aligned}
$$

4. De même dans la seconde équation

$$
\begin{aligned}
&- B\omega^2\cos(\omega t) = \omega_0^2(A\cos(\omega t) - 2B\cos(\omega t)) \\
\Leftrightarrow &- B\omega^2 = \omega_0^2(A - 2B) \\
\Leftrightarrow &A = B\left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \\
\Leftrightarrow &A = B(2 - \lambda)
\end{aligned}
$$

   Or on a vu précédemment que $B = A(2-\lambda)$ d'où $A = A(2-\lambda)^2$, en développant, on trouve l'équation vérifiée par λ :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

5. Une résolution numérique donne $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ comme solutions.
   La solution $\lambda = 1$ amène à $A = B$ donc $x_1 = x_2$, ce qui revient à dire que les points M_1 et M_2 oscillent en phase.
   La solution $\lambda = 3$ amène à $A = -B$ donc $x_1 = -x_2$, ce qui revient à dire que les points M_1 et M_2 oscillent en opposition de phase.
6. On peut voir sur le graphique que les points oscillent en opposition de phase donc $\lambda = 3$ d'où $\omega^2 = 3\omega_0^2$. d'où $k = \frac{m\omega^2}{3} = \frac{m4\pi^2}{3T^2}$. L'application numérique donne $k = 20\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.