DM n° 1

Théophile Cailliau

À rendre le lundi 31 janvier 2019

Problème 1

Préliminaires

1. On montre le résultat par récurrence.
   — **Initialisation :**
   $$f^{(0)}(a) + \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$
   — **Pas récurrent :**
   $$\begin{aligned}
   &\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\
   &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\
   &\qquad + \frac{1}{(n+1)!} \left(\left[(b-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + (n+1) \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \right) \\
   &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\
   &= f(b)
   \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. On prend $b = x$, $a = 0$. On a
   $$\begin{aligned}
   0 \leq t \leq x &\implies 1 \leq e^t \leq e \\
   &\implies 0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{e(x-t)^n}{n!} \\
   &\implies 0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\ \mathrm{d}t \leq \frac{e}{n!} \int_0^x (x-t)^n\ \mathrm{d}t = \frac{ex^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}
   \end{aligned}$$
   puisque $x \in [0,1]$

Partie A

1. ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ (on a $\psi'(x) = 1 - 2x > 0$ sur $\mathbb{R}_-$) et continue, donc injective. Elle est surjective sur $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_-$ (pour $x \leq 0$, on a $x \leq x^2$ donc $\psi(x) \leq 0$, et on a $\psi(0) = 0$). Donc ψ est bijective de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$