Mines-Ponts-PC-2-98

L'objet du problème est l'étude des zéros d'une solution u de $E(I,q)$

$$y'' + q(t)y = 0$$

où $I = [0,T]$, $T > 0$, q est une fonction réelle définie et continue sur I.

Dans tout le problème, u est une fonction réelle, de classe C^2 sur I, non nulle, et solution de $E(I,q)$.

Première partie

Encadrement du nombre de zéros d'une solution de $E(I,q)$

I-1° Les fonctions g et θ associées à une solution u

a.

Soit f définie sur I par : $f(t) = u'(t) + iu(t)$.
Si $f(c) = 0$, alors $u(c) = u'(c) = 0$ et donc, u est la fonction nulle (admis) ce qui est exclu par hypothèse, donc f ne s'annule pas.

b.

<u>Théorème de relèvement :</u>

> Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $h \in C^k(I,U)$.
> Il existe une fonction $\theta \in C^k(I,\mathbf{R})$ telle que $h = e^{i\theta}$.
> θ est appelée **relèvement** de h.

Considérons la fonction g de classe C^1 définie par $g(t) = \sqrt{u'^2(t) + u^2(t)}$, d'aprés le (a), g est strictement positive sur I, et on peut appliquer le théorème de relèvement à la fonction $h = f/g$.
On ramène alors $\theta(0)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, en ajoutant à θ une constante de la forme $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).
Si $\theta(0) \in [0,\pi[$, elle convient, sinon, on définit g par $g(t) = -\sqrt{u'^2(t) + u^2(t)}$ et on enlève π à la fonction θ précédente.

c.

Exemple : $I = [0,1]$, soit$q(t) = \omega^2$, où p entier supérieur ou égal à 2 et ω réel tel que :

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \omega < \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi$$

u est la solution de $y'' + \omega^2 y = 0$ telle que $u(0) = 0$ et $u'(0) = \omega$

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

$$f(t) = \omega\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = g(t)e^{i\theta(t)}$$

$f(0) = \omega > 0$. On choisit donc $g(t) = \sqrt{\omega^2\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$, on obtient $\theta(0) = 0$.

Sur $[0, \dfrac{\pi}{2\omega}[$, $\theta(t) = \arctan\left(\dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t)\right)$, $\theta\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Et, par une reccurence immédiate, sur $]\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}, \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}[$, $\theta(t) = \arctan\left(\dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t)\right) + k\pi$, $\theta\left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}\right) = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$.

$u(t) = 0$ si et seulement si t est de la forme $t = \dfrac{k\pi}{\omega}$, $\theta\left(\dfrac{k\pi}{\omega}\right) = k\pi$.

d.

Exprimons de deux manières la fonction f'

$$f'(t) = u''(t) + iu'(t) = -q(t)u(t) + iu'(t) = -q(t)g(t)\sin(\theta(t)) + ig(t)\cos(\theta(t))$$

$$f'(t) = g'(t)e^{i\theta(t)} + ig(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}$$

$$= \big(g'(t)\cos(\theta(t)) - t)\theta'(t)\sin(\theta(t))\big) + i\big(g'(t)\sin(\theta(t)) + g(t)\theta'(t)\cos(\theta(t))\big)$$

D'où, par identification des parties réelles et imaginaires, les fonction g' et θ' sont données par le système :

$$\begin{cases} g'(t)\cos(\theta(t)) & - & g(t)\theta'(t)\sin(\theta(t)) & = & -q(t)g(t)\sin(\theta(t)) \\ g'(t)\sin(\theta(t)) & + & g(t)\theta'(t)\cos(\theta(t)) & = & g(t)\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} g'(t) & = & (1 - q(t))g(t)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t)) \\ \theta'(t) & = & \cos^2(\theta(t)) + q(t)\sin^2(\theta(t)) \end{cases}$$

Dans la deuxième équation, on a simplifié par $g(t)$, ce qui est possiolble puisque g ne s'annule pas sur I.

I-2° Suite des zéros d'une solution u

On suppose que u a n zéros sur $]0, T]$, notés $0 < t_1 < t_2 < \ldots t_n \leq T$

a.

$u(t_k) = 0$, $\sin(\theta(t_k)) = 0$, $\theta(t_k) \equiv 0\ [\pi]$ donc $\theta'(t_k) = 1$

b.

$\theta(0) \in [0, \pi[$ et $\sin(\theta(t))$ ne s'annule pas sur $]0, t_1[$.
Si $\theta(0) > 0$, θ est donc strictement positive sur $]0, t_1[$ et si $\theta(0) = 0$, alors $\theta'(0) = 1$, et on conclut de même.

Donc $\theta(t_1) = 0$ ou π, mais $\theta'(t_1) = 1$, donc θ est strictement croissante au voisinage de t_1 donc,

$$\theta(t_1) = \pi$$

c.

Soit k, $1 \leq k \leq n-1$, supposons que $t_k = k\pi$, alors, pour $t \in J_k =]t_k, t_{k+1}[$, $\theta(t) \in]k\pi, (k+1)\pi$ et $t_{k+1} = (k+1)\pi$ par le même raisonnement.

$$\forall k \in [1, n], \quad \theta(t_k) = k\pi$$

(Le texte demande un résultat pour $1 \leq k \leq n-1$, notons que ce résultat est valable aussi pour k=n)

d.

Toujours pour les mêmes raisons, si $T = t_n$, $\theta(T) = n\pi$, sinon, $n\pi \leq \theta(T) < (n+1)\pi$

I-3° Une évaluation du nombre de zéros

Soit n le nombre de zéros de u sur $]0, T]$

a.

$$\theta(T) = \theta(0) + \int_0^T \theta'(t)dt = \theta(0) + \int_0^T (1 + (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t)))dt$$

$$\theta(T) - T = \theta(0) + \int_0^T (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t))dt$$

$$n\pi - T \leq \theta(T) - T < \pi + \int_0^T |1 - q(t)|dt$$

$$(n+1)\pi - T > \theta(T) - T \geq 0 + \int_0^T (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t))dt$$

$$\Longrightarrow \qquad T - n\pi < \pi - \int_0^T (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t))dt \leq \pi + \int_0^T |1 - q(t)|dt$$

D'où :

$$|n\pi - T| \leq \pi + \int_0^T |1 - q(t)|dt$$

b.

Dans cette question $q(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

$$\int_0^T \left|1 - \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right| dt = \int_0^T \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_0^{\sqrt{T}} \frac{2udu}{1+u} = 2\sqrt{T} - 2\ln(1+\sqrt{T})$$

$$\left|\frac{n\pi}{T} - 1\right| \leq \frac{\pi}{T} + \frac{2}{\sqrt{T}} - 2\frac{\ln(1+\sqrt{T})}{T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$n \sim \frac{T}{\pi}$$

Deuxième partie

Soient q_1 et q_2 deux fonctions réelles définies et continues sur I. La fonction q_1 est supposée majorée par q_2 sur I.

II-1° Un résultat préparatoire

Dans la définition du J_α, il faut rectifier le texte, en φ ne s'annule pas en un point autre que c.

a.

Posons $\theta_1(c) = \theta_2(c) = m$. Soit $t \in J_\alpha$, posons $t = c + x$, $\theta_2(c+x) = m + x_2$ et $\theta_1(c+x) = m + x_1$ (par hypothèse $x_1 \neq x_2$, x_1 et x_2 tendent vers 0 avec x)

$$h(t) = \frac{1}{\theta_2(t) - \theta_1(t)}\Big(\cos^2(\theta_2(t)) - \cos^2(\theta_1(t)) + q_1(t)(\sin^2(\theta_2(t)) - \sin^2(\theta_1(t)))\Big)$$

$$= \frac{1}{\theta_2(t) - \theta_1(t)}\frac{1}{2}(1 - q_1(t))(\cos(2\theta_2(t)) - \cos(2\theta_1(t)))$$

$$h(t) = -\frac{1}{\theta_2(t) - \theta_1(t)}(1 - q_1(t))\sin(\theta_2(t) + \theta_1(t))\sin(\theta_2(t) - \theta_1(t))$$

$$h(c+x) = -\frac{1}{x_2 - x_1}(1 - q_1(c+x))\sin(2m + x_2 + x_1)\sin(x_2 - x_1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -(1 - q_1(c))\sin(2\theta_1(c))$$

$$\bar{h}(c) = -(1 - q_1(c))\sin(2\theta_1(c))$$

En tout point t tel que $\varphi(t) \neq 0$,

$$\varphi'(t) - h(t)\varphi(t) = (q_2(t) - q_1(t))\sin^2(\theta_2(t)) \leq 0$$

Cette inégalité se prolonge par continuité aux points (isolés) où φ s'annule.

b.

Il suffit ici de prouver que la fonction k est positive. Or, par hypothèse, $k(0) = \varphi(0) = \theta_2(0) - \theta_1(0) \geq 0$ et

$$k'(t) = (\varphi'(t) - \bar{h}(t)\varphi(t))exp(H(t)) \geq 0$$

D'où le résultat.

II-2° Nombre de zéros de deux solutions de $E(I, q_1)$ et $E(I, q_2)$

a.

Si $u_1(0) = 0$ alors $\theta_1(0) = 0 \leq \theta_2(0)$. Il en résulte $\theta_1(t) \leq \theta_2(t)$ pour tout t et en particulier $\theta_1(T) \leq \theta_2(T)$.
Or, si on note n_1 et n_2 le nombre de soluions de u_1 et u_2 respectivement sur $]0, T]$, l'encadrement de la question I.2.d donne

$$n_1 \leq n_2$$

Si $u_1(0) \neq 0$, $u_2(0) \neq 0$ et $\dfrac{u_2'(0)}{u_2(0)} \leq \dfrac{u_1'(0)}{u_1(0)}$ alors $cotan(\theta_2(0)) \leq cotan(\theta_1(0))$, ce qui, dans $]0, \pi[$ redonne l'inégalité $\theta_1(0) \leq \theta_2(0)$ et donc la même conclusion.

b.

Si $u_1(0) = 0$, alors toutes les solutions de $E(I, q_2)$ ont au moins n zéros.

Sinon, il suffit de choisir une solution u_2 de $E(I, q_2)$ dont les conditions initiales vérifient $u_2(0) \neq 0$ et $\dfrac{u_2'(0)}{u_2(0)} \leq \dfrac{u_1'(0)}{u_1(0)}$: cette solution a au moins n zéros.

Troisième partie

On définit la fonction q^+, $q^+(t) = sup(0, q(t))$. La fonction q^+ est une fonction réelle définie et continue sur I.

III-1° Une inégalité sur l'intégrale de la fonction q^+

L'équation $E(I,q)$ admet une solution u ayant au moins deux zéros sur $[0,T]$

a.

La fonction q étant majorée par la fonction q^+ sur I, les résultats de la deuxième partie s'appliquent.
Si les zéros de u sont dans $]0,T]$, on applique la partie 2 pour $n=2$, d'où l'existence d'une solution v de $E(I,q^+)$ admettant au moins deux zéros sur $]0,T]$ notés α et β ($\alpha<\beta$) dans la suite de cette question $III-1$.
Si l'un des zéros de u est nul, on choisit une solution v s'annulant en 0 et on applique la partie 2 pour $n=1$.

b.

$$\begin{aligned}A(t) &= (\beta-t)\int_\alpha^t (s-\alpha)q^+(s)v(s)ds + (t-\alpha)\int_t^\beta (\beta-s)q^+(s)v(s)ds\\ &= -(\beta-t)\int_\alpha^t (s-\alpha)v''(s)ds - (t-\alpha)\int_t^\beta (\beta-s)v''(s)ds\end{aligned}$$

Procédons à des intégrations par parties :

$$A(t) = -(\beta-t)\Big[(s-\alpha)v'(s)\Big]_\alpha^t + (\beta-t)\int_\alpha^t v'(s)ds - (t-\alpha)\Big[(\beta-s)v'(s)\Big]_t^\beta - (t-\alpha)\int_t^\beta v'(s)ds$$

$$A(t) = (\beta-\alpha)v(t)$$

c.

On suppose que v prend des valeurs positives sur $[\alpha,\beta]$, elle atteint donc son maximum strictement positif (puisqu'elle n'est pas nulle sur cet intervalle) en un point $t_0\in]\alpha,\beta[$.

Pour $s\in[\alpha,t_0]$, $\beta-t_0\le\beta-s$ et pour $s\in[t_0,\beta]$, $t_0-\alpha\le s-\alpha$, on obtient alors, puisque toutes les fonctions sont positives :

$$(\beta-\alpha)v(t_0) = A(t_0) \le \int_\alpha^\beta (\beta-s)(s-\alpha)q^+(s)v(s)ds \le v(t_0)\int_\alpha^\beta (\beta-s)(s-\alpha)q^+(s))ds$$

Soit, en simplifiant par $v(t_0)>0$

$$(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta (\beta-s)(s-\alpha)q^+(s))ds \le (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta \frac{(T-s)s}{T}q^+(s)ds$$

$$T \le \int_\alpha^\beta (T-s)sq^+(s)ds \le \int_0^T (T-s)sq^+(s)ds$$

d.

Si v est négative sur $[\alpha,\beta]$ (α et β étant deux zéros consécutifs), la fonction $-v$ est aussi solution de $E(I,q^+)$ et vérifie les conditions ci-dessus.

Or, sur $[0,T]$, $(T-s)s\le\dfrac{T^2}{4}$ donc

$$T \le \int_0^T \frac{T^2}{4}q^+(s)ds \Longleftrightarrow \int_0^T q^+(t)dt \ge \frac{4}{T}$$

III-2° Majoration du nombre de zéros

On suppose que u admet n zéros dans $]0,T]$ notés $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n \leq T$.
Soit alors v une solution de $E(I,q^+)$ admettant $n' \geq n$ zéros sur $]0,T$ notés $0 < t'_1 < t'_2 \ldots < t'_{n'} \leq T$.
Appliquons la relation admise aux zéros de v :

$$\frac{(n'-1)^2}{T} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t_{k+1}-t_k}$$

Appliquons le résultat de la question précédente sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$:

$$(\beta-\alpha) \leq \int_\alpha^\beta (\beta-s)(s-\alpha)q^+(s))ds \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\int_\alpha^\beta q^+(t)dt$$

d'où :

$$\frac{(n'-1)^2}{T} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\int_{t_k}^{t_{k+1}} q^+(t)dt \leq \frac{1}{4}\int_0^T q^+(t)dt$$

$$n \leq n' \leq 1 + \sqrt{\frac{T}{4}\int_0^T q^+(t)dt}$$