Démos étoilées, semaine 7

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Démonstration. On considère le polynome en t

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + ty_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

C'est un polynome du second degré si et seulement si $\exists i \in [\![1, n]\!], y_i \neq 0$.

— Si $\forall i \in [\![1, n]\!], y_i = 0$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est clairement vérifiée

— Sinon, on sait que le polynome est toujours positif donc on a

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0$$

Ce qui est équivalent à l'inégalité voulue.

□

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Démonstration. On suppose $\sqrt{2}$ rationnel. Alors, il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p \wedge q = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On a alors

$$2q^2 = p^2 \implies \exists k \in \mathbb{N}^*, p^2 = 4k$$

Donc p est pair et

$$2q^2 = 4k^2 \iff q^2 = 2k^2 \implies 2|q$$

Donc q est pair, ce qui contredit l'hypothèse $p \wedge q = 1$. Donc $\sqrt{2}$ est irrationel. □

Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: Tout réel peut être approché par une suite d'irrationnels et une suite de rationnels.

Démonstration. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 &\iff 10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x \\
&\iff \frac{10^n x - 1}{10^n} < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x \\
&\implies \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{(théorème d'encadrement)}
\end{aligned}$$

Et on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$. On admet $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor - \sqrt{2}}{10^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - \sqrt{2}}{10^n} \in \mathbb{Q} \iff \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = -10^n \frac{p}{q} + \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Q}$$

Or $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - \sqrt{2}}{10^n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Existence et unicité de la solution impaire de $y' + 2xy = 1$

Démonstration. Si y est impaire, alors $y(0) = 0$. L'équation est linéaire d'ordre 1. Donc

$$\begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy. On a donc l'existence et l'unicité d'une solution y_0 telle que $y_0(0) = 0$. On vérifie maintenant que y_0 est impaire. On considère $z : x \mapsto -y_0(-x)$. On a $z'(x) = y_0(-x)$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) + 2xz(x) = 1 \iff y_0(-x) + 2(-x)y_0(-x) = 1 \iff y_0(x) + 2xy_0(x) = 1$$

Donc z est solution du même problème de Cauchy, et par unicité de la solution, on a $z = y_0$, donc y_0 est impaire. $\square$