Démo 1 : Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$

On suppose $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} x \leq t \leq 2x &\iff \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{e^t}{2x} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^t}{x} \\ &\iff \int_x^{2x} \frac{e^t}{2x}\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{x}\ \mathrm{d}t \quad (\text{car } x \leq 2x) \\ &\iff \frac{e^{2x}-e^x}{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t \leq \frac{e^{2x}-e^x}{x} \end{aligned}$$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-e^x}{2x} = +\infty$ donc par minoration de l'intégrale, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t = +\infty$$

Démo 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$. Donner le lien entre I_{n+1} et I_{n-1}.

On prend $u(t) = \sin^n(t)$ et $v'(t) = \sin t$. On a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [-\sin^n(t)\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^{n-1}(t)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)(1-\sin^2(t))\ \mathrm{d}t \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

Démo 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\exists k > 0,\ \forall x \geq 0,\ f(x) \leq k\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que f est la fonction nulle. On pourra considérer $g : x \mapsto e^{-kx} \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$

On a $g(x) \geq 0$ et $g(0) = 0$. On a aussi,

$$\forall x \geq 0, g'(x) = e^{-kx}\left(f(x) - k\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right) \leq 0 \quad \text{par hypothèse}$$

Donc $\forall x \geq 0, g(x) = 0$. On sait que $e^{-kx} > 0$ donc $\forall x \geq 0$

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \implies f(x) = 0$$

Démo 4 : $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\ \mathrm{d}t$: parité, dérivabilité, expression de la dérivée.

On a, par le changement de variable $u = -t$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \exp(-t^2)\ \mathrm{d}t = -\int_x^{2x} \exp(-(-u)^2)\ \mathrm{d}u = -f(x)$$

donc f est impaire.

Soit $\varphi : x \longmapsto \exp(-x^2)$. φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi : x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$$

en est une. ψ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \varphi(x)$ On a $f(x) = \psi(2x) - \psi(x)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \psi'(2x) - \psi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

Démo 5 : Encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ puis en déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$$

On a pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} k \leq t \leq k+1 &\iff \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \\ &\iff \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(|n|) = \ln n \iff H_n \leq \ln n + 1$$

et

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n} \iff \ln n + \frac{1}{n} \leq H_n$$