Exercice. Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2 \mathrm{d}x$$

Résolution. On pose $E=\mathbb{R}[X]$ et

$$\forall (P,Q)\in E^2, \varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

L'application φ définit un produit scalaire sur E

— *(Symétrie)* On a $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$ directement par commutativité du produit.

— *(Bilinéarité)* On a la bilinéarité par la linéarité de l'intégrale.

— *(Positivité)*

$$\varphi(P,P)=\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t$$

— *(Définie)*

$$\varphi(P,P)=\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t=0 \iff P^2=0 \iff P=0$$

On a, par Schmidt

$$\mathbb{R}_1[X]=\mathrm{Vect}(1,X)=\mathrm{Vect}\left(1,\frac{X-\varphi(X,1)}{||X-\varphi(X,1)||}\right)=\mathrm{Vect}\left(1,\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Avec $\left(1,\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)\right)$ base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. On a de plus

$$m=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\mathrm{d}x=\inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]}\int_0^1 (x^2-P(x))^2\mathrm{d}x=\inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]}||X^2-P||^2=||X^2-p(X^2)||^2$$

Avec p projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_1[X]$. On a

$$\begin{aligned} p(X^2)&=\varphi(X^2,1)+\varphi\left(X^2,\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)\right)\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{1}{3}+(12X-6)\int_0^1\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=X-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Donc

$$m=||X^2-X+\frac{1}{6}||^2=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{180}$$

Exercice. Déterminer l'orthogonale des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résolution. On note $D_n(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}((E_{i,i})_{1\le i\le n})$ le sev des matrices diagonales. On a

$$\begin{aligned} A=(a_{i,j})\in D_n(\mathbb{R})^\perp &\iff \forall i\in[\![1,n]\!], \langle A,E_{i,i}\rangle=0\\ &\iff \forall i\in[\![1,n]\!], \mathrm{Tr}(AE_{i,i})=\sum_{k=1}^n (AE_{i,i})_{k,k}=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{k,l}\delta_{k,i}\delta_{l,i}=0\\ &\iff \forall i\in[\![1,n]\!], a_{i,i}=0\end{aligned}$$

Donc $D_n(\mathbb{R})^\perp$ est le sev des matrices dont la diagonale est nulle.

Exercice. $E=\mathbb{R}_2[X]$ munit du produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle=\sum_{k=-1}^{1}P(k)Q(k)$$

Donner une base orthonormale de E.

Résolution. On orthomalise la base canonique $(1,X,X^2)$ avec Schmidt. On notera (e_1,e_2,e_3) la nouvelle base. On a

— $||1||^2 = 3$ donc

$$e_1 = \frac{1}{||1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

— $\langle 1, X\rangle = 0$ et $||X||^2 = 2$ donc

$$e_2 = \frac{X - \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1/\sqrt{3}, X\rangle}{||X - \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1/\sqrt{3}, X\rangle||} = \frac{X}{||X||} = \frac{1}{\sqrt{2}}X$$

— $\langle X^2, 1\rangle = 2$, $\langle X^2, X\rangle = 0$ et $||X^2 - \frac{2}{3}||^2 = \frac{2}{3}$ donc

$$e_3 = \frac{X^2 - \frac{1}{3}\langle X^2, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\langle X^2, X\rangle}{||X^2 - \frac{1}{3}\langle X^2, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\langle X^2, X\rangle||} = \frac{\sqrt{3}X^2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$