Propriété. Toutes famille de vecteurs non nuls orthogonaux est libre.

Démonstration. Soit $(e_i)_{i\in I}$, famille de vecteurs orthgonaux non nuls, $J \subset I$. Soient $(\alpha_i)_{i\in J}$ scalaires réels tels que

$$\sum_{i\in J} \alpha_i e_i = 0$$

Alors,

$$\forall k \in J, \sum_{i\in J} \alpha_i \langle e_i, e_k\rangle = \alpha_i \langle e_k, e_k\rangle = 0 \implies \forall k \in J, \alpha_k = 0$$

Puisque $\langle e_k, e_k\rangle \neq 0$. La famille est donc libre.

Propriété. E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in L(E)$. Alors

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id} - f) = 0$$

Démonstration. On a, pour $n = \dim(E)$:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } f &\iff \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})) > 0 \\
&\iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}) < n \\
&\iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0 \\
&\iff (-1)^n \det(f - \lambda \mathrm{Id}) = \det(\lambda \mathrm{Id} - f) = (-1)^n \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Exercice. Montrer que $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Résolution. On vérifie.

— *(Symétrique)* On a

$$\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B) = \mathrm{Tr}({}^t(A^t B)) = \mathrm{Tr}(B^t A) = \langle B, A\rangle$$

— *(Bilinéaire)* On a la symétrie donc on se contente de vérifier pour le premier vecteur du produit scalaire. On a la linéarité puisque Tr est linéaire.

— *(Positive)*

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n} (A^t A)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 > 0$$

— *(Définie)* De même :

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 0 \implies \forall (i,k) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,k} = 0$$

Propriété. *(Cauchy-Schwarz)* Pour tout $(x, y) \in E^2$, avec E espace euclidien munit du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, on a

$$\langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Avec égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$ ou $y = 0$

Démonstration. On prend $t \in \mathbb{R}$. On suppose y non nul puisque l'inégalité est clairement vérifiée pour $y = 0$. On a

$$||x + ty||^2 = ||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x, y\rangle$$

C'est un polynome du second degré en t. Il est positif par définition donc son déterminant est négatif ou nul.

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0 \iff \langle x, y\rangle \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

On cherche les cas d'égalité. On suppose toujours y non nul puisqu'on a égalité pour $y = 0$. Si on a égalité, le polynome admet une racine double t_0 et on a

$$||x + t_0 y||^2 = ||x + t_0 y|| \cdot ||x + t_0 y|| = 0 \iff x + t_0 y = 0 \iff x = -t_0 y$$

D'où le résultat avec $\lambda = -t_0$

Propriété. F sev de dimension finie de E et p projection orthogonale sur F alors

$$||x - p(x)|| = \inf_{y \in F} ||x - y|| = \min_{y \in F} ||x - y||$$

$$\text{et } \forall y \in F, y \neq p(x) \implies ||x - y|| > ||x - p(x)||$$

Démonstration. $y \in F$,

$$\begin{aligned} ||x - y||^2 = ||x - p(x) + p(x) - y||^2 &= ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2 + 2\langle \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp}, \underbrace{p(x) - y}_{\in F} \rangle \\ &= ||x - p(x)||^2 + ||p(x) - y||^2 \\ &\geq ||x - p(x)||^2 \quad \text{avec égalité ssi } y = p(x) \end{aligned}$$

On a le second résultat puisque

$$y \neq p(x) \implies ||x - y|| > ||x - p(x)||$$