Exercice : *(Déterminant de Vandermonde).* Calculer le déterminant suivant, pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ réels distincts :

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Résolution. On regarde $D_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$:

$$D_n(a_1, \dots, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à $n-1$ (on développe par rapport à la dernière ligne, chaque cofacteur est une constante). De plus, $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des racines distinctes du polynome car le déterminant est une forme linéaire alternée. Donc :

$$D_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$$

Avec λ coefficient dominant. On a donc

$$\lambda = \Delta_{n,n} = D_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

D'où

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = D_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$$

Et, par récurrence immédiate :

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k-1} (a_k - a_i) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (a_k - a_i)$$

Propriété : $\forall (f, g) \in L(E)^2, \qquad (1) \quad \det(f \circ g) = \det f \det g$ et $(2) \quad f \in GL(E) \iff \det f \neq 0$

Démonstration : Pour (1). $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

$$\det_B(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)) = (\det f) \det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)) = (\det f)(\det g) \det_B(e_1, \dots, e_n) = (\det f)(\det g)$$

Mais aussi

$$\det_B(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)) = \det(f \circ g) \det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(f \circ g)$$

Pour (2). Le sens ($\Longrightarrow$) est direct : $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E donc de déterminant non nul, et le déterminant de cette base vaut $(\det f) \det_B(e_1, \dots, e_n) = \det f$. On montre maintenant le sens ($\Longleftarrow$). Si $\det f \neq 0$, on a

$$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (\det f) \det_B(e_1, \dots, e_n) = \det f \neq 0$$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base, d'où $f \in GL(E)$

Exercice : $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Calculer

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

Résolution. On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

Donc, en développant par rapport aux n premières lignes pour le permier déterminant, et par rapport aux p dernières pour le deuxième,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{vmatrix} = (\det C)(\det A)$$