Propriété *(Inégalité de Markov).* Pour X v.a.r positive sur (Ω, P) espace probabilisé fini, on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) &= \sum_{\substack{x \in X(\omega) \\ x < \varepsilon}} xP(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq \varepsilon}} xP(X = x) \\ &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq \varepsilon}} xP(X = x) \geq \epsilon \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq \varepsilon}} P(X = x) = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Propriété *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)* Pour X v.a.r sur (Ω, P) espace probabilisé fini, on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration. On commence par remarquer $(|X - E(x)| \geq \varepsilon) = ((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2)$. $(X - E(X))^2$ est une v.a.r positive. Il ne reste qu'à appliquer Markov.

Exercice. (a_n) suite de réels et (b_n) suite de complexes telle que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ est le terme d'une suite bornée. On suppose aussi que (a_n) tend vers 0 et est décroissante.

1. Montrer que $\sum S_n(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente
2. Montrer
$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N S_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n$$
3. En déduire la nature de $\sum a_n b_n$

Résolution.

1. On note M un majorant de $(|S_n|)$. On a, par la décroissance de (a_n)
$$|S_n(a_n - a_{n+1})| \leq M|a_n - a_{n+1}| = M(a_n - a_{n+1})$$
Donc la suite converge (série téléscopique)
2.
$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, a_N S_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n &= a_N S_N + \sum_{n=0}^{N-1} a_n S_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} S_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n S_n - \sum_{n=1}^{N} a_n S_{n-1} = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \end{aligned}$$
3. Ça converge (le premier terme converge et le second aussi par la première question)

Exercice. Montrer l'implication suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \implies \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$$

Résolution. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{p=0}^{k} \binom{p}{k} b_p \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \binom{p}{k} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \sum_{k=p}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n! k!}{k!(n-k)!p!(k-p)!} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \sum_{k=p}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!(n-p)!}{(n-k)!p!(k-p)!(n-p)!} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{p} (-1)^{n-k} \binom{n-p}{k-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p} (-1)^{n-k} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} (-1)^{n-p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{n} b_p \binom{n}{p} \delta_{n,p} = b_n
\end{aligned}$$