Exercice. Convergence de $\sum \ln(1-\frac{1}{k^2})$ et valeur de la somme de $\sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k^2})$

Résolution.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)-(\ln(k)-\ln(k-1))\\ &= \ln(n+1)-\ln(n)-\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2\end{aligned}$$

Donc la série converge et la somme vaut $-\ln 2$

Exercice. On pose

$$\forall n\geq 1, a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Montrer que $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge absolument. En déduire qu'il existe γ tel que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Résolution. On a, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)+\ln(n)\\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ |a_{n+1}-a_n| &\leq \frac{1}{2(n+1)^2} + \left|o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right|\end{aligned}$$

Donc $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge absolument par règle de comparaison. La série est téléscopique donc (a_n) converge et il existe γ tq

$$a_n = \gamma + o(1)$$

D'où le résultat.

Exercice. On pose $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Préciser la limite de u_n et nu_n. Nature de $\sum u_n$ et de $\sum(-1)^n u_n$

Résolution. On a, par récurrence immédiate, (u_n) positive. De plus, $\forall n\geq 0, u_n \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc $u_n \longrightarrow 0$.

$(n+1)u_{n+1} = e^{-u_n} \longrightarrow 1$ car $u_n \longrightarrow 0$. La règle d'équivalence (termes positifs) donne la divergence de $\sum u_n$.

$$\begin{aligned}(-1)^n u_{n+1} = \frac{(-1)^n e^{-u_n}}{n+1} &= \frac{(-1)^n}{n+1}\left(1-u_n+o(u_n)\right)\\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n+1}}_{CV} + \underbrace{\frac{-(-1)^n u_n}{n+1}}_{\text{CA} \implies \text{CV}} + \underbrace{o\left(\frac{u_n}{n+1}\right)}_{\text{CA par équivalent}}\end{aligned}$$