Exercice : Donner un équivalent de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Résolution. On pose $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. f est décroissante donc

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Donc on a

$$\forall k \geq 1, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \implies \forall n \geq 1, \quad \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Et aussi

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n-1} - 2 \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n-1} - 1$$

D'où, au final,

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n-1} - 1 \implies 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{2\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc, par théorème d'encadrement

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Propriété : Si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\sum a_n$ converge.

Démonstration. On traite d'abord le cas réel. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n^+ = \max\{0, a_n\} \\ a_n^- = \max\{0, -a_n\} \end{cases}$$

On a alors $a_n = a_n^+ - a_n^-$, et $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Les séries $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ sont à termes positifs donc les sommes partielles sont croissantes, et elles tendent vers une limite réelle ou vers $+\infty$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} |a_n| = \sum_{k=0}^{n} a_n^+ + \sum_{k=0}^{n} a_n^-$$

Donc les deux séries convergent (si l'une des deux diverge ou si les deux divergent, alors $\sum |a_n|$ diverge). Par linéarité, on a $\sum a_n$ convergente.

Dans le cas complexe, on a

$$\sum_{k=0}^{n} |a_n| = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Re(a_n)^2 + \Im(a_n)^2} \geq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\Re(a_n)^2} = \sum_{k=0}^{n} |\Re(a_n)|$$

Donc $\sum |\Re(a_n)|$ converge, et de même $\sum |\Im(a_n)|$ converge. On se ramène alors au cas réel.

Propriété *(critère spécial des séries alternées)* **:**

- Si $\sum u_n$ est une série alternée, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors $\sum u_n$ converge.
- Dans ce cas, si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$, alors $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et R_n est du signe de u_{n+1}.

Démonstration. On suppose $u_0 \geq 0$, et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$$

On a alors $(S_{2n})_n$ positive et $(S_{2n+1})_n$ est négative. On montre que ces deux suites sont adjacentes. On a

$$\forall n \geq 1, \quad S_{2n+2} - S_{2n} \geq 0 \quad \text{par décroissance de } (|u_n|)_n$$

et

$$\forall n \geq 1, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} \leq 0 \quad \text{par décroissance de } (|u_n|)_n$$

De plus,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites sont donc adjacentes et admettent une limite commune ℓ. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$$

On a alors l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq S_{2n}$$

D'où $|R_n| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|$. De plus, on a $R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$ et $u_{2n+1} \leq 0$ donc R_{2n} est du signe de u_{2n+1}. On fait le même raisonnement pour R_{2n+1}.

Propriété *(règle d'équivalence)* **:** $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites positives équivalentes. Alors $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$.

Démonstration.