Propriété : Si $u \in L(E,F)$ avec $\mathrm{rg}(u) \geq 1$, alors il existe une base B_E de E et une base B_F de F telles que $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{J}_r$

Démonstration. On pose $\mathrm{rg}(u) = r \geq 1$, $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. On a, par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = p - r$.

On pose $B = (e_{r+1}, \dots, e_p)$ base de $\mathrm{Ker}(u)$ que l'on complète en $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ base de E.

On a $\mathrm{rg}(u) = r$. On pose $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ base de $\mathrm{Im}(u)$, que l'on complète en $B_F = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$. On a alors

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(u) = \mathrm{J}_R$$

Exercice. Trouver les $A \in M_n(\mathbb{K}) \big/ \ \forall B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA$

Résolution. On pose $A = (a_{i,j})$ solution. A commute avec tous les B, donc A commute avec tous les $E_{i,j}$. Alors,

$$(AE_{i,j})_{m,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}(E_{i,j})_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = a_{m,i}\delta_{j,l}$$

et

$$(E_{i,j}A)_{m,l} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{m,i}\delta_{k,j}a_{k,l} = a_{j,l}\delta_{m,i}$$

d'où

$$\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4, a_{m,i}\delta_{j,l} = a_{j,l}\delta_{m,i} \implies \forall (i,j) \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

On a donc $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Exercice. *(Théorème d'Hadamard)* Si $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

alors A est inversible.

Résolution. On procède par l'absurde et on suppose

$$\exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A), X \neq 0$$

On a alors $\exists m \in [\![1,n]\!], x_m = \max\{|x_i|, i \in [\![1,n]\!]\} \neq 0$. On a

$$AX = 0 \implies \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j = 0 \implies |a_{m,m}||x_m| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} |a_{m,j}||x_j| \leq |x_m| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{m,j}| \implies |a_{m,m}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{m,j}|$$

D'où une contradiction et $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. On a $n = \mathrm{rg}(A) - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \mathrm{rg}(A)$ donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Propriété : Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H, on a $E = H \oplus D$.

Démonstration. Il existe φ forme linéaire de $E^\star$ non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On pose $D = \mathrm{Vect}(e_1)$. On a

$$\forall x \in E, x = \underbrace{x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e_1)}e_1}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(e_1)}e_1}_{\in D} \implies E = H + D$$

On a également $H \cap D = \{0\}$ (en effet, si $x \in H \cap D$, $x = \lambda e_1$ donc $0 = \varphi(x) = \lambda\varphi(e_1)$ or $\varphi(e_1) \neq 0$ donc $\lambda = 0$ et $x = 0$)

Propriété : ϕ et ψ formes linéaires non nulles de E, alors

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi) \iff \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 \ / \ \phi = \lambda\psi$$

Démonstration.

— $\Longleftarrow$) Direct.

— $\Longrightarrow$) $H = \mathrm{Ker}(\phi)$ hyperplan car $\phi \in E$, $\phi \neq 0$ et $\exists a \in E, \phi(a) \neq 0$. On a $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
On pose $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\phi(a)}, a \notin H = \mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi) \implies \lambda \neq 0$. Alors

$$\forall x \in H, \psi(x) = 0 = \lambda(x)$$

et

$$\forall x \in D = \mathrm{Vect}(a), \psi(a) = \lambda\phi(a)$$