Propriété : Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ et, pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, on a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration. Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\text{Tr}(\alpha A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,j} + b_{i,j})_{i,i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \alpha \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

donc $\text{Tr} \in M_n(\mathbb{K})^\star$ et

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \text{Tr}(BA)$$

Propriété : E, F des $\mathbb{K}-$ev munis d'une base B_E et B_F. $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $f \in L(E,F)$, avec $A = \text{Mat}_{B_E,B_F}(f)$. On a

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f \in \text{Isom}(E,F)$$

Dans ce cas, on a $A^{-1} = \text{Mat}_{B_E,B_F}(f^{-1})$

Démonstration.

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff \exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n \\ &\iff \exists g \in L(E,F), A \cdot \text{Mat}_{B_E,B_F}(g) = \text{Mat}_{B_E,B_F}(g) \cdot A = I_n \\ &\iff f \circ g = g \circ f = \text{Id} \\ &\iff f \in \text{GL}(E,F) \text{ et } g = f^{-1} \end{aligned}$$

Propriété :

- $B = (e_1, \cdots, e_n), B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ bases, $X = \text{Mat}_B(x)$, et $X' = \text{Mat}_{B'}(x)$. On a $X' = PX$, avec $P = P_B^{B'}$.
- $A = \text{Mat}_{B_E,B_F}(f)$, $A' = \text{Mat}_{B'_E,B'_F}(f)$ B_E, B'_E bases de E, B_F, B'_F bases de F. Alors

  $$A' = Q^{-1}AP$$

  avec $P = P_{B_E}^{B'_E}$ et $Q = P_{B_F}^{B'_F}$

Démonstration.

- $$x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} e_k \sum_{p_{kj} x'_j}$$

  Donc $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$ donc $X = PX'$
- $$\begin{aligned} y = f(x) &\iff Y = AX \quad X = \text{Mat}_{B'_E}(x) \quad Y = \text{Mat}_{B_F}(y) \\ &\iff Y' = A'X' \quad X' = \text{Mat}_{B'_E}(x) \quad Y = \text{Mat}_{B'_F}(y) \\ &\iff QY' = APX' \\ &\iff Y' = Q^{-1}APX' \\ &\implies A' = Q^{-1}AP \quad \left(\text{en prenant } X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Exercice : En utilisant les formules de changement de bases, expliquer comment trouver la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection sur $P : x + y + z = 0$ parallèlement à $D : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

Résolution. On note p la projection. On a directement

$$\text{Im}(p) = \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$$

et
$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}((1,2,3))$$
On note $B_p = ((1,0,-1),(0,1,-1),(1,2,3))$ la base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Alors,
$$\mathrm{Mat}_{B_p}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On note B_E la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $P = P_{B_p}^{B}$ la matrice de passage de la base B_p à la base B. On calcule P^{-1} et on a
$$\mathrm{Mat}_B(p) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{B_p}(p)P$$