Propriété : Si $f \in L(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$

Démonstration. On note $f_1 = f|_S$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_1) \subset \mathrm{Ker}(f)$. On a $x \in S$ or $S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc $x = 0$, et f_1 est injective.

On suppose $y \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y = f(x_0)$. On sait $\exists!(x_1, x_2) \in S \times \mathrm{Ker}(f), x_0 = x_1 + x_2$, donc $y = f(x_0) = f(x_1) = f_1(x_1)$ car $x_1 \in S$, donc $y \in \mathrm{Im}(f_1)$, et f_1 est surjective.

Théorème du rang : E et F $\mathbb{K}-$ev de dimension finie. Si $f \in L(E,F)$, alors

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

Démonstration.

Ker(f) est de dimension finie, donc accepte un supplémentaire S dans E. On a

$$\dim(E) = \dim(S) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

f induit un isomorphisme f' de S sur $\mathrm{Im}(f)$, donc $\dim(S) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$, d'où la formule.

Propriété : E, F, G, H des $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, $f \in L(E,F)$, $g \in \mathrm{Isom}(F,G)$, $h \in \mathrm{Isom}(H,E)$. Alors

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(g \circ f)$$

Démonstration. On montre $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ h)$.

$$\mathrm{rg}(f \circ h) = \dim((f \circ h)(H)) = \dim(f(E)) = \mathrm{rg}(f)$$

On montre maintenant $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$. On a

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)$$

Or $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, donc par théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)\right)$$

Si $x \in \mathrm{Ker}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right)$, alors $g(x) = 0 \iff x = 0$ car g isomorphisme. Donc on a bien

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(g|_{\mathrm{Im}(f)}\right) = \mathrm{rg}(g \circ f)$$

Propriété : E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie n, et $f \in L(E)$, alors

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

Démonstration.

— *(1 $\Longrightarrow$ 2)* On a une inclusion directe ($\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$). Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, soit $y = f(x_0)$. $\exists(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f), x_0 = x_1 + x_2 = f(x_1') + x_2$ donc $y = f(x_0) = f^2(x_1')$ donc $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, d'où l'égalité

— *(2 $\Longrightarrow$ 3)* On a une inclusion directe ($\mathrm{Ker}(f) \subset Ker(f^2)$), puis par théorème du rang, et en utilisant $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \implies \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$$

On a donc égalité entre les deux ensembles.

— *(3 $\Longrightarrow$ 4)* On a $n = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ (si y est dans l'ensemble, $f^2(x_0) = f(y) = 0$ donc $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y = 0$), d'où le résultat

— On a bien *(4 $\Longrightarrow$ 1)*

Exercice : Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Résolution.

On a

$$A = 2I_3 + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $2I_3$ commute avec toutes les matrices. On a

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3K \implies \forall n \geq 1, K^n = 3^{n-1}K$$

On a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} K^k = 2^n I_3 + \frac{K}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} = 2^n I_3 + \frac{1}{3} K (5^n - 2^n)$$