Propriété : $f \in L(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ famille génératrice de E. On a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(x_i))_{i\in I})$$

et, si f est injective et $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre

Démonstration.
Soit $f \in L(E,F)$, $(x_i)_{i\in I}$ famille génératrice de E, et $y \in \mathrm{Im}(f)$. On a $y = f(x_0)$ avec

$$x_0 = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \implies y = \sum_{i\in I} \alpha_i f(x_i)$$

donc on a bien

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(x_i))_{i\in I})$$

On considère maintenant f injective et $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre. On a

$$\sum_{i\in I} \alpha_i f(x_i) = 0 \implies f\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = 0 \implies \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0 \implies \forall i \in I, \alpha_i = 0$$

Propriété : E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F sev de E. Il existe G sev de E tel que

$$E = F \oplus G$$

Démonstration.
Si $F = \{0\}$, $E = F \oplus E$, et si $F = E$, $E = F \oplus \{0\}$. On considère donc $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. On munit F de la base $(e_1, \ldots, e_p)$. C'est une famille libre de E, qu'on peut compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On pose $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et $E = F \oplus G$

Propriété : E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G sev de E. Alors

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, alors on a directement le résultat. On suppose les deux différents de $\{0\}$. On munit F de la base $(e_1, \ldots, e_p)$, et G de la base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On a $E = F \oplus G$ donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On a $\dim(E) = n = p + n - p = \dim(F) + \dim(G)$
$\Longleftarrow$) On pose $H = F + G$. On a $H = F \oplus G$ car $F \cap G = \{0\}$. On a de plus $\dim(H) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, or H est un sev de E, d'où $H = E$.

Propriété *(formule de Grassman)* : E un $\mathbb{K}$-ev, F et G sev de E de dimensions finies. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration.
$F \cap G$ est de dimension finie (c'est un sev de F), et $F + G$ aussi. $F \cap G$ est un sev de F, donc admet un complémentaire H tel que $F = F \cap G \oplus H$.
On veut montrer $F + G = G \oplus H$. On a, pour $x \in G \cap H$, $x \in H \subset F$ donc $x \in F \cap G$, soit $x = 0$ (car $F \cap G \cap H = \{0\}$).
On a $H \subset F$ donc $G + H \subset F + G$. Si $x \in F + G$, alors

$$\exists x_1 \in F \cap G, \exists x_2 \in G, x = x_1 + x_2$$

et

$$F = F \cap G \oplus H \implies \exists x_3 \in F \cap G, \exists x_4 \in H, x_1 = x_3 + x_4$$

soit

$$x = \underbrace{x_2 + x_3}_{\in G} + \underbrace{x_4}_{\in H}$$

Donc on a $F + G \subset G \oplus H$, soit $F + G = G \oplus H$. On en déduit

$$\dim(F+G) = \dim(G) + \dim(H)$$

or on a

$$\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(H) \iff \dim(H) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$$

et donc

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exercice. $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille des polynomes de Lagrange associée est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Résolution.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note $\forall i \in [\![0, n]\!], y_i = f(x_i)$. On sait qu'il existe un unique polynome interpolateur Q de degré $d^\circ Q \leq n$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!], f(x_i) = y_i$ On a alors $Q = P$ (puisque P est interpolateur également). Ce polynome s'écrit

$$Q = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$$

où $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est la famille des polynomes de lagrange associée à $(x_0, \dots, x_n)$. On a donc $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n)$, et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ donc la famille est une base.