Propriété : L'ensemble des applications paires et l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont deux sev supplémentaires de l'ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Démonstration.

On pose P l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $P \subset E$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (p_1, p_2) \in P^2, \alpha p_1 + p_2 \in P$ donc P sev de E. Pareil pour I.

(Analyse) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f = p + i$ avec $p \in P$ et $i \in I$, alors on a

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases} \iff \begin{cases} p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

D'où l'unicité s'il y a existence

(Synthèse) On pose $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. On a bien p paire et i impaire, et $p + i = f$ d'où l'existence de la décomposition.

Propriété : Si $p \in L(E)$ avec $p \circ p = p$ alors $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$, $\operatorname{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$, et p est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. On a $x = p(x) + x - p(x)$, et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$ (car $p(x - p(x)) = p(x) - p(x) = 0$).
   Soit $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0$ et $p(x) = x$ donc $x = 0$. On a donc bien $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$
2. Soit $x \in \{x \in E \mid p(x) = x\}$. Alors $x = p(x)$ donc $x \in \operatorname{Im}(p)$. Soit $x \in \operatorname{Im}(p)$, alors $x = p(x_0) \implies p(x) = p(x_0) = x$ donc $x = p(x)$.
3. Soit $x \in E$. Il existe un unique $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im}(p) \times \operatorname{Ker}(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$. Donc p projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Propriété : Si $s \in L(E)$, alors $s \circ s = \mathrm{Id} \iff s$ symétrie

Démonstration.

$\Longleftarrow$) Soit s symétrie par rapport à E_1 de direction E_2. On note $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On a $s \circ s(x) = s(s(x_1 + x_2)) = s(x_1 - x_2) = x \implies s \circ s = \mathrm{Id}$

$\Longrightarrow$) On pose $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$. $p \in L(E)$ et on a

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2 \circ s + \mathrm{Id}) = p$$

donc p projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$. On a $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Donc

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) \times \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}), x = x_1 + x_2$$

Et on a $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$ donc s est une symétrie.

Exercice : Montrer $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1 + X, X + X^2) \oplus \operatorname{Vect}(X^2)$. Soit p la projection sur $\operatorname{Vect}(1 + X, X + X^2)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(X^2)$. Donner $p(-1 + 3X + X^2)$

Résolution.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P = c(1 + X) + (b - c)(X + X^2) + (c - b + a)X^2$ d'où l'unicité et l'existence de la décomposition de P donc $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}(1 + X, X + X^2) \oplus \operatorname{Vect}(X^2)$.

On a $p(-1 + 3X + X^2) = p(-1(1 + X) + 4(X + X^2) - 3X^2) = -(1 + X) + 4(X + X^2)$