Semaine 2

(Varjabedian)

Question de cours: Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}$

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (\sqrt{3}+3i)z + i\sqrt{3} - 1 = 0$.
2. En déduire les solutions de $2z^{2n} - (\sqrt{3}+3i)z^n + i\sqrt{3} - 1 = 0$

Semaine 3

(Drouot)

Question de cours: Soient $f : E \to F, g : F \to G$. Montrer que $g \circ f$ injective (resp. surjective) entraine f injective (resp. g surjective).

Exercice 1.

$f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{\ln x}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.

Étudier $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Exercice 3.

Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : F \to E$. Montrer que parmis $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, si deux sont injectives et l'autre surjective, alors f, g, et h sont bijectives.

Exercice 4. *(Théorème de Cantor, exercice supplémentaire)*

Soit E un ensemble (non nécessairement fini). On veut montrer que $\#\mathcal{P}(E) > \#E$.

1. Donner une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$

Exercice 5. *(Exercice supplémentaire)*

Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$$

est une bijection.

Semaine 4

(Huvent)

Question de cours: Soit $f : E \to F$. Montrer que

$$f \text{ injective } \iff \forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Exercice 1.

Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$

Exercice 2.

On se propose de trouver les réels x tels que :

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1)$
2. Soit $x \in D_f$, on pose $\theta = \arcsin(\sqrt{x})$. Justifier que θ est bien défini et préciser à quel intervalle il appartient, exprimer x en fonction d'une des lignes trigonométriques [1] de θ.
3. Exprimer $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ et $2x-1$ en fonction de θ et conclure.

Semaine 5

(Vallaeys)

Question de cours: Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\exists k > 0, \forall x \geq 0, f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

Montrer que f est l'application nulle.

Exercice 1.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(pt)\, \mathrm{d}t$ de trois manières différentes.

Exercice 2.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On suppose

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_a^b t^k f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

1. sin, cos, ou tan

Semaine 6

(Bailleul)

Exercice 1.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + \omega^2 y = 1$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t \, \mathrm{d}t$$

2. *(Question supplémentaire)* Montrer

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!} = e^x$$

Exercice 3.

Résoudre

$$\mathrm{ch}(t) y' - \mathrm{sh}(t) y = \mathrm{sh}^3(t)$$

Semaine 7

(Dormart)

Question de cours: Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice 1.

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' - x y' + y = 1$$

en utilisant $y(x) = x z(x)$

Exercice 2.

On veut montrer l'identité d'Hermite :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

On pose pour ça

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$$

1. Montrer que f_n est $\frac{1}{n}$-périodique.
2. Calculer $f_n(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$
3. Conclure.

Exercice 3.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Semaine 8

(Samain)

Question de cours: Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Montrer

$$u_n v_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$$

Exercice 1.

Soient (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. On admettra que cette limite est e.
2. Montrer que e n'est pas rationnel.
3. Montrer $v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3}$. En déduire $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que
$$n^\alpha n!(v_n - e) \longmapsto 1$$
4. Étudier la suite $\big(\sin(\pi e n!)\big)_{n\geq 1}$

Semaine 9

(Heumez)

Question de cours: Montrer le lemme de Cesàro

Exercice 1.

Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2.

Donner un équivalent en $+\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$$

Exercice 3.

Montrer que $(\cos n)$ diverge

Exercice 4.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell < 1$. Donner la limite de (u_n).

Semaine 10

(Drouot)

Question de cours: Caractérisation d'un sous-groupe

Exercice 1.

Dans l'anneau $(A,+,.)$, on suppose que : $\forall (a,b)\in A^2, (a^2-a)b = b(a^2-a)$. Montrer, pour tout $(x,y,z)\in A^3$, que $(xy+yx)z = z(xy+yx)$. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 2.

On définit HK par $HK = \{h.k, h\in H, k\in K\}$. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,.)$. Montrer que HK est un sous-groupe de G ssi $HK = KH$.

Exercice 3. *(Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$)*

1. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, pour $a\in\mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$. *(Indication : on pourra considérer $a = \inf G\cap\mathbb{R}_+^\star$, puis distinguer les cas $a = 0$ et $a > 0$)*
2. Application : Montrer que $\{a + b\sqrt{2}, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
3. Application : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons $G(f) = \{T\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$. Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que si $G(f)$ est dense et que s'il existe un point $a\in\mathbb{R}$ tel que f possède une limite à droite (ou à gauche) en a, alors f est constante. Donner une fonction f non constante telle que $G(f)$ soit dense dans $\mathbb{R}$

Semaine 11

(Huvent)

Question de cours: Soit $(G,\cdot)$ un groupe abélien d'élément neutre e. Montrer que

$$H = \{x\in G, \exists d\in\mathbb{N}^*, x^d = e\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 1.

Donner un équivalent de $\dfrac{\ln\frac{2x}{\pi}}{\cos^2(x)}$ en $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2.

Etudier les limites aux bords du domaine de définition de

$$f(x) = (1+\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$$

Exercice 3.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Montrer que

$$f \text{ a une limite en } +\infty \iff f \text{ est constante sur } \mathbb{R}$$

Semaine 12

(Boughagha)

Question de cours: I intervalle et $f \in \mathcal{C}(I) \implies f(I)$ intervalle

Exercice 1.
$f : [a, b] \to [a, b]$ continue $(a > b)$, telle que

$$\forall (x, y) \in [a, b], x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer que f admet un point fixe

Exercice 2.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(1) = 0$. Montrer

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$$

Semaine 13

(Gammelin)

Question de cours: Montrer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis

Exercice 1.
Soit I un intervalle, et $a < b$ deux réels de I. On considère $f \in \mathcal{C}(I)$ dérivable en a telle que $f(a) < f(b)$ et $f'(a) < 0$. Montrer

$$\exists c \in]a, b[, f(c) = f(a)$$

Exercice 2.
Soit $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[)$ et $f \in \mathcal{C}(]a, +\infty[)$, avec $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer

$$\exists c > a, f'(c) = 0$$

Semaine 14

(Bailleul)

Question de cours: Théorème de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement

Exercice 1.

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$. Déterminer, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f est n fois dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2)$$

2. En déduire les solutions de $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Semaine 15

(Brunnin)

Question de cours:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exercice 1.

On pose

$$F = \{(a, b, a-b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \{(h, 2h-k, -2h), (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que F et G sont deux deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer $F \cap G$.

Exercice 2.

E est un $\mathbb{K}$-ev, $(f, g, h) \in L(E)^3$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h)$. Établir que $f^2 = g^2 = h^2$. Montrer $f = g \circ f \circ g$ puis $f = f^5$. En déduire $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 3.

Donner les coefficients et le degré du polynome

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Semaine 16

(Samain)

Question de cours: Formule de Taylor

Exercice 1.

Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1 \\ (a,b,c) \in \mathbb{U}^3 \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ fixé. Montrer

$$\exists ! P \in \mathbb{R}[X], P - P' = X^n$$

Exercice 3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer $\forall m \in \mathbb{Z}, P(m) \in \mathbb{Z}$.

Semaine 17

(Heumez)

Question de cours: Donner un exemple de projecteur. Soit p projecteur. Montrer que
- $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
- $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$
- p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ par rapport à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$ un entier. On rappelle qu'un projecteur de $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 = u$, où u^2 désigne la composée $u \circ u$. On note Id l'application identité entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés générales des projecteurs. Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. On lui associe l'endomorphisme $\hat{u} = \mathrm{Id} - u$.
   (a) Montrer que $\hat{u}$ est un projecteur
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(\hat{u}) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(\hat{u}) = \mathrm{Ker}(u)$
2. Soient p et q dans $L(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. Le but de cette question est de démontrer que

$$\begin{aligned} p - q \text{ bijectif} &\iff Id - p \circ q \text{ et } p + q - p \circ q \text{ bijectifs} \\ &\iff \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

   (a) On suppose que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$. Montrer que $p - q$ est bijectif [2]

   (b) On suppose dans cette partie que $p - q$ est bijectif.
      i. Montrer que $\mathrm{Id} - p \circ q$ est bijectif. Indication : on pourra prendre $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p \circ q)$ et calculer $(p - q)^2(x)$.
      ii. Posons $\hat{p} = \mathrm{Id} - p$ et $\hat{q} = \mathrm{Id} - q$. Justifier que $\hat{p} - \hat{q}$ est bijectif.
      iii. En déduire que $p + q - p \circ q$ est bijectif.

   (c) On suppose dans cette partie que $\mathrm{Id} - \mathrm{p} \circ \mathrm{q}$ et $p + q - p \circ q$ sont bijectifs.
      i. Justifier qu'il existe $z \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Id} = z \circ p + z \circ (\mathrm{Id} - p) \circ q$.
      ii. En déduire que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0\}$
      iii. Montrer que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$
      iv. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$

2. Pour cette question et le reste de l'exercice, on admet qu'en dimension finie, pour un endomorphisme, injectif entraine surjectif

Semaine 18

(Varjabedian)

Question de cours: Soient $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts, et $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille de polynomes de Lagrange associée. Montrer que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $R_n[X]$

Exercice 1. *(Exercice partiel : je n'ai pas eu le temps de le terminer)*

Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que Δ est linéaire. Donner $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$
2. Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q, P(0) = 0$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)$
3. On note $\displaystyle\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ et $\displaystyle\binom{X}{0} = 1$
   (a) Montrer $\Delta\left(\binom{X}{k}\right) = \binom{X}{k-1}$
   (b) *(formule de Gregory)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k(P)(0)\binom{X}{k}$

Semaine 19

(Drouot)

Question de cours: Le rang est inchangé par composition à droit ou à gauche par un isomorphisme

Exercice 1.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$$

À faire : retrouver le système. L'ensemble solution est $(0,0,1) + \mathrm{Vect}((2,1,-3))$

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. F et G sont des sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E :

$$F \oplus H = G \oplus H = E$$

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$

Semaine 20

(Huvent)

Question de cours: En utilisant les formules de changement de bases, expliquer comment trouver la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection sur $P : x+y+z=0$ parallèlement à $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}x & 0 & \mathrm{sh}x \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sh}x & 0 & \mathrm{ch}x \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire A^n.

Exercice 2.

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la matrice $\theta(A) = \mathrm{Tr}(A)I_2 - A$. Montrer que $\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Montrer que θ est une symétrie. Préciser ses éléments géométriques.

Exercice 3.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit

$$\varphi \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \longmapsto \mathrm{Tr}(A)M + \mathrm{Tr(M)A} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$$

On suppose qu'il existe λ tel que $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \lambda M$. Donner les valeurs possibles de λ. Sont-elle atteintes ?

Semaine 21

(Vallaeys[3])

Question de cours: ϕ et ψ formes linéaires non nulles de E, alors

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi) \iff \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 \;/\; \phi = \lambda\psi$$

Exercice 1.

$A \in M_{3n}(\mathbb{R})$, $A^3 = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2n$. Montrer

$$\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = \mathrm{rg}(A) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A))$$

3. Colle de la PLS

Semaine 22

(Bailleul)

Exercice 1.

Donner un développement limité de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 et 0.

Exercice 2.

Donner

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$$

Exercice 3.

Donner un $DL_{22}(0)$ de $\exp\left(\sum_{k=1}^{21} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right)$

Exercice 4.

Donner un DL à l'odre 8 de

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

Semaine 23

(Dormart)

Étant donné les exercices peu intéressants, il est inutile de s'intéresser à cette colle

Semaine 24

(Samain)

Question de cours: Nature de $\sum \ln(1 - \frac{1}{k^2})$ et valeur de la somme si la série converge

Exercice 1.

On considère E un ensemble fini de cardinal n. Combien existe-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $\#X \cap Y = 1$?

Exercice 2.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les tire toutes successivement sans remise

1. Quelle est la probabilité de tirer les boules $2 - 3 - 4$ dans cet ordre et consécutivement ?
2. Quelle est la probabilité de tirer les boules $2 - 3 - 4$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement ?

Exercice 3.

On considère A, B événements de (Ω, P) espace probabilisé fini. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B)P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B)P(A \cap \overline{B})$$

Semaine 25

(Heumez)

Question de cours: *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)*

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon}$$

Exercice 1.

Simplifier la somme

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p}$$

Exercice 2.

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément p boules $(1 \leq p < n)$. On note X la variable aléatoire qui correspond à la plus grande boule, et Y la variable aléatoire qui correspond à la plus petite.

1. Donner la fonction de répartition [4] de X et Y. En déduire la loi de X et celle de Y.
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

4. F_X la fonction de répartition de X est la fonction $F_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$

Semaine 26

(Drouot)

Question de cours: Donner $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$ avec $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Exercice 1.

Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

Exercice 2.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice de terme général $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det(A(x))$ est polynomiale de degré inférieur ou égalà 1.
2. Pour a, b distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ réels, donner

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Exercice 3.

Donner la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *(Générateurs de S_n)*

Montrer que

1. $\{(i \quad j), (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ engendre S_n
2. $\{(i \quad i+1), i \in [\![1,n-1]\!]\}$ engendre S_n
3. $\{(0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n), (1 \quad 2)\}$ engendre S_n

Semaine 27

(Huvent)

Question de cours: Montrer que $\langle A|B\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 1.

On considère $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{Tr}(AB^T)$. Donner la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ au sev des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 2.

Soit E euclidien, $a \in E$ tel que $||a|| = 1$, on définit $\langle x|y\rangle = (x|y) + k(x|a)(y|a)$. Donner une CNS sur k pour que $\langle \ | \ \rangle$ soit un produit scalaire sur E.

Semaine 28

(Boughagha)

Question de cours: Donner l'orthogonal du sev des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 1.

E espace euclidien, A vecteur non nul de E. Résoudre pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\langle A, X \rangle = \lambda$$

Exercice 2.

Montrer que F est G sont supplémentaires dans $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

et

$$G = \{f \in E | f(x) = ax + b\}$$

Exercice 3.

On considère f forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Tr})$

Exercice 4.

On considère $A \in \mathbb{R}_n[X], \deg A = p$ fixé et F le sev des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ divisibles par A. Donner un supplémentaire de F. En déduire la dimension de F.

Semaine 29

(Gammelin)

Question de cours: Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue.

Exercice 1.

On pose $f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan t}{t}\, \mathrm{d}t$. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^\star$. Étudier la parité de f, et montrer qu'elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et en déduire une expression sur $\mathbb{R}^\star$

Exercice 2.

Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \ln \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \right)$$

Exercice 3.

Soit $n \geq 2$. On pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ et $I_n = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$. Comparer u_n et I_n, et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4.

Étudier la fonction $H : x \longmapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\, \mathrm{d}t$. (définition, parité, périodicité, H', ...)

Semaine 30

(Bailleul)

Question de cours: Somme de deux variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \cdot, n\}$

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On place dans une urne U, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, 2^k boules numérotées k. On tire alors une boule de l'urne au hasard en considérant que chaque boule a la même chance d'être tirée, et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k2^k$
3. Déterminer l'espérance de X.
4. On définit une variable Y de la manière suivante : Si X prend la valeur $k \in [\![0, n]\!]$, on remet la boule k dans l'urne et on effectue un nouveau tirage dans l'urne. Si le numéro de la boule est inférieur ou égal à k, Y vaut 1 et dans l'autre cas, Y vaut 0. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 2.

Soient X et Y deux variable aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$

Exercice 3. *(Supplémentaire, facile)*

On considère deux avions A_2 et A_4 qui ont respectivement 2 et 4 réacteurs. On dit qu'un voyage est réussi si au moins la moitié de réacteurs fonctionnent à l'attérissage. Pour chaque réacteur, il y a une probabilité $0 < p < 1$ de tomber en panne au cours d'un voyage. Quel avion faut-il prendre ?