Les Polynômes

1 Rappels

$\mathbb{K}$ désigne un corps (donc commutatif). Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit P ou $P(X)$, l'évaluation en $a \in \mathbb{K}$ de P se note $P(a)$. L'application

$$P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto P(a) \in \mathbb{K}$$

est un morphisme d'algèbres qui est injectif si $\mathbb{K}$ est injectif. Pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P ssi

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P$$

et a est racine de multiplicité $\alpha \geq 1$ ssi

$$\begin{cases} P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0 \\ P^{(\alpha)}(a) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (X-a)^{\alpha} \mid P \\ (X-a)^{\alpha+1} \nmid P \end{cases}$$

Si a n'est pas racine de P, on convient que a est racine de multiplicité 0.

Notation.
- On note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$
- On note $\operatorname{mult}(P, a)$ la multiplicité de la racine a dans P

Théorème. *Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Le polynôme P a au plus* $\deg P$ *racines dans $\mathbb{K}$. En particulier, le polynôme nul est le seul polynôme qui a une infinité de racines.*