Semaine 2

(Varjabedian)

Question de cours: Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}$

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (\sqrt{3}+3i)z + i\sqrt{3} - 1 = 0$.
2. En déduire les solutions de $2z^{2n} - (\sqrt{3}+3i)z^n + i\sqrt{3} - 1 = 0$

Semaine 3

(Drouot)

Question de cours: Soient $f : E \to F, g : F \to G$. Montrer que $g \circ f$ injective (resp. surjective) entraine f injective (resp. g surjective).

Exercice 1.

$f :]1; +\infty[\to \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{\ln x}$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.

Étudier $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Exercice 3.

Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : F \to E$. Montrer que parmis $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, si deux sont injectives et l'autre surjective, alors f, g, et h sont bijectives.

Exercice 4. *(Théorème de Cantor, exercice supplémentaire)*

Soit E un ensemble (non nécessairement fini). On veut montrer que $\#\mathcal{P}(E) > \#E$.

1. Donner une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$

Exercice 5. *(Exercice supplémentaire)*

Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$$

est une bijection.

Semaine 4

(Huvent)

Question de cours: Soit $f : E \to F$. Montrer que

$$f \text{ injective } \iff \forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Exercice 1.

Montrer que $\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$

Exercice 2.

On se propose de trouver les réels x tels que :

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1)$
2. Soit $x \in D_f$, on pose $\theta = \arcsin(\sqrt{x})$. Justifier que θ est bien défini et préciser à quel intervalle il appartient, exprimer x en fonction d'une des lignes trigonométriques[1] de θ.
3. Exprimer $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ et $2x-1$ en fonction de θ et conclure.

Semaine 5

(Vallaeys)

Question de cours: Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\exists k > 0, \forall x \geq 0, f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est l'application nulle.

Exercice 1.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t$ de trois manières différentes.

Exercice 2.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On suppose

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$.

1. sin, cos, ou tan

Semaine 6

(Bailleul)

Exercice 1.
Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Résoudre $y'' + \omega^2 y = 1$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t \, \mathrm{d}t$$

2. *(Question supplémentaire)* Montrer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{n!} = e^x$$

Exercice 3.
Résoudre

$$\mathrm{ch}(t)y' - \mathrm{sh}(t)y = \mathrm{sh}^3(t)$$

Semaine 7

(Dormart)

Question de cours: Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice 1.
Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' - xy' + y = 1$$

en utilisant $y(x) = xz(x)$

Exercice 2.
On veut montrer l'identité d'Hermite :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

On pose pour ça

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$$

1. Montrer que f_n est $\frac{1}{n}$-périodique.
2. Calculer $f_n(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$
3. Conclure.

Exercice 3.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Semaine 8

(Samain)

Question de cours: Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Montrer

$$u_n v_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$$

Exercice 1.

Soient (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. On admettra que cette limite est e.
2. Montrer que e n'est pas rationnel.
3. Montrer $v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3}$. En déduire $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que
$$n^\alpha n!(v_n - e) \longmapsto 1$$
4. Étudier la suite $\big(\sin(\pi e n!)\big)_{n\geq 1}$

Semaine 9

(Heumez)

Question de cours: Montrer le lemme de Cesàro

Exercice 1.

Trouver

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 2.

Donner un équivalent en $+\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$$

Exercice 3.

Montrer que $(\cos n)$ diverge

Exercice 4.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell < 1$. Donner la limite de (u_n).

Semaine 10

(Drouot)

Question de cours: Caractérisation d'un sous-groupe

Exercice 1.

Dans l'anneau $(A,+,.)$, on suppose que : $\forall (a,b)\in A^2, (a^2-a)b = b(a^2-a)$. Montrer, pour tout $(x,y,z)\in A^3$, que $(xy+yx)z = z(xy+yx)$. Montrer que A est un anneau commutatif.

Exercice 2.

On définit HK par $HK = \{h.k, h\in H, k\in K\}$. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,.)$. Montrer que HK est un sous-groupe de G ssi $HK = KH$.

Exercice 3. *(Sous-groupes de* $(\mathbb{R},+)$*)*

1. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, pour $a\in\mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$. *(Indication : on pourra considérer* $a = \inf G\cap\mathbb{R}_+^\star$*, puis distinguer les cas* $a = 0$ *et* $a > 0$*)*
2. Application : Montrer que $\{a+b\sqrt{2}, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
3. Application : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons $G(f) = \{T\in\mathbb{R}/\forall x\in\mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$. Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que si $G(f)$ est dense et que s'il existe un point $a\in\mathbb{R}$ tel que f possède une limite à droite (ou à gauche) en a, alors f est constante. Donner une fonction f non constante telle que $G(f)$ soit dense dans $\mathbb{R}$

Semaine 11

(Huvent)

Question de cours: Soit $(G,\cdot)$ un groupe abélien d'élément neutre e. Montrer que

$$H = \{x\in G, \exists d\in\mathbb{N}^*, x^d = e\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 1.

Donner un équivalent de $\dfrac{\ln\frac{2x}{\pi}}{\cos^2(x)}$ en $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2.

Etudier les limites aux bords du domaine de définition de

$$f(x) = (1+\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$$

Exercice 3.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$. Montrer que

$$f \textit{ a une limite en } +\infty \iff f \textit{ est constante sur } \mathbb{R}$$

Semaine 12

(Boughagha)

Question de cours: I intervalle et $f \in \mathcal{C}(I) \implies f(I)$ intervalle

Exercice 1.
$f : [a, b] \to [a, b]$ continue $(a > b)$, telle que

$$\forall (x, y) \in [a, b], x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer que f admet un point fixe

Exercice 2.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(1) = 0$. Montrer

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$$

Semaine 13

(Gammelin)

Question de cours: Montrer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis

Exercice 1.
Soit I un intervalle, et $a < b$ deux réels de I. On considère $f \in \mathcal{C}(I)$ dérivable en a telle que $f(a) < f(b)$ et $f'(a) < 0$. Montrer

$$\exists c \in]a, b[, f(c) = f(a)$$

Exercice 2.
Soit $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[)$ et $f \in \mathcal{C}(]a, +\infty[)$, avec $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer

$$\exists c > a, f'(c) = 0$$

Semaine 14

(Bailleul)

Question de cours: Théorème de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement

Exercice 1.

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$. Déterminer, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f est n fois dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2)$$

2. En déduire les solutions de $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$

Semaine 15

(Brunnin)

Question de cours:

$$\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Exercice 1.

On pose

$$F = \{(a, b, a-b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$G = \{(h, 2h-k, -2h), (h,k) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que F et G sont deux deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 2.

E est un $\mathbb{K}$-ev, $(f,g,h) \in L(E)^3$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) = \text{Ker}(h)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(g) = \text{Im}(h)$. Établir que $f^2 = g^2 = h^2$. Montrer $f = g \circ f \circ g$ puis $f = f^5$. En déduire $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 3.

Donner les coefficients et le degré du polynome

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Semaine 16

(Samain)

Question de cours: Formule de Taylor

Exercice 1.

Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1 \\ (a,b,c) \in \mathbb{U}^3 \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ fixé. Montrer

$$\exists! P \in \mathbb{R}[X], P - P' = X^n$$

Exercice 3.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer $\forall m \in \mathbb{Z}, P(m) \in \mathbb{Z}$.

Semaine 17

(Heumez)

Question de cours: Donner un exemple de projecteur. Soit p projecteur. Montrer que
- $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
- $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$
- p est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ par rapport à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$ un entier. On rappelle qu'un projecteur de $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 = u$, où u^2 désigne la composée $u \circ u$. On note Id l'application identité entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés générales des projecteurs. Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. On lui associe l'endomorphisme $\hat{u} = \mathrm{Id} - u$.
   (a) Montrer que $\hat{u}$ est un projecteur
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(\hat{u}) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(\hat{u}) = \mathrm{Ker}(u)$
2. Soient p et q dans $L(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. Le but de cette question est de démontrer que

$$\begin{aligned} p - q \text{ bijectif} &\iff Id - p \circ q \text{ et } p + q - p \circ q \text{ bijectifs} \\ &\iff \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

   (a) On suppose que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$. Montrer que $p - q$ est bijectif [2]
   (b) On suppose dans cette partie que $p - q$ est bijectif.
      i. Montrer que $\mathrm{Id} - p \circ q$ est bijectif. Indication : on pourra prendre $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p \circ q)$ et calculer $(p - q)^2(x)$.
      ii. Posons $\hat{p} = \mathrm{Id} - p$ et $\hat{q} = \mathrm{Id} - q$. Justifier que $\hat{p} - \hat{q}$ est bijectif.
      iii. En déduire que $p + q - p \circ q$ est bijectif.
   (c) On suppose dans cette partie que $\mathrm{Id} - \mathrm{p} \circ \mathrm{q}$ et $p + q - p \circ q$ sont bijectifs.
      i. Justifier qu'il existe $z \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Id} = z + z \circ (\mathrm{Id} - p) \circ q$.
      ii. En déduire que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0\}$
      iii. Montrer que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$
      iv. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$

2. Pour cette question et le reste de l'exercice, on admet qu'en dimension finie, pour un endomorphisme, injectif entraine surjectif

Semaine 18

(Varjabedian)

Semaine 19

(Drouot)

Semaine 20

(Huvent)

Semaine 21

(Vallaeys)

Semaine 22

(Bailleul)

Semaine 23

(Dormart)

Semaine 24

(Samain)

Semaine 25

(Heumez)

Semaine 26

(Drouot)

Semaine 27

(Huvent)

Semaine 28

(Boughagha)

Semaine 29

(Gammelin)

Semaine 30

(Bailleul)